Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

1.1 Hoch- und Tiefpunkte von Funktionen höheren Grades

Bestimme die Hoch- und Tiefpunkte

$f(x) = 4/5\, x^5 - 10/3\, x^3 + 9/4\, x$

1. Ableitung

$f'(x) = 5*4/5\, x^4 - 3*10/3\, x^2 + 9/4$

$f'(x) = 4\, x^4 - 10\, x^2 + 9/4$

2. Ableitung

$f''(x) = 4*4\, x^3 - 2*10\, x$

$f''(x) = 16\, x^3 - 20\, x$

1. Ableitung $f'(x) = 0$ setzen und x ausrechnen:

$0 = 4\, x^4 - 10\, x^2 + 9/4$

Substi: **$z = x^2$**

$0 = 4\, z^2 - 10\, z + 9/4 \quad | :4$

$0 = z^2 - 2{,}5\, z + (9/16) \quad | \; p = - 2{,}5 \; ; \; q = (9/16)$

pq-Formel:

$$z_{1/2} = -\left(\frac{p}{2}\right) \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$$

$$z_{1/2} = -\left(\frac{-2{,}5}{2}\right) \pm \sqrt{(\frac{-2{,}5}{2})^2 - (\frac{9}{16})}$$

$$z_{1/2} = 1{,}25 \pm \sqrt{1{,}56 \quad - 0{,}56)}$$

$$z_{1/2} = 1{,}25 \pm \sqrt{1)}$$

$$z_{1/2} = 1{,}25 \pm 1{,}0$$

Damit ergibt sich für x_1; x_2 ; x_3 und x_4 :

$z_1 = 1{,}25 + 1{,}0 = 2{,}25 \quad | \; z = x^2$

$(x_1)^2 = 2{,}25 \quad | \sqrt{\;}$

$x_1 = -\sqrt{2{,}25} = -1{,}5$

$x_2 = +\sqrt{2{,}25} = +1{,}5$

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

$z_2 = 1,25 - 1,0 = 0,25$ | $z = x^2$

$(x_2)^2 = 0,25$ | $\sqrt{\ }$

$x_3 = +\sqrt{0,25} = +0,5$

$x_4 = -\sqrt{0,25} = -0,5$

Kontrolle auf Min oder Max

$f''(x_1) = 16\,x^3 - 20\,x$ | $x_1 = 1,5$

$f''(x_1) = 16 * 1,5^3 - 20*1,5 = +24 > 0$ ⇨ **Minimum**

$f''(x_2) = 16\,x^3 - 20\,x$ | $x_2 = -1,5$

$f''(x_2) = 16 * (-1,5^3 - 20*(-1,5) = -24 < 0$ ⇨ **Maximum**

$f''(x_3) = 16\,x^3 - 20\,x$ | $x_3 = 0,5$

$f''(x_3) = 16 * 0,5^3 - 20*0,5 = -8 > 0$ ⇨ **Maximum**

$f''(x_4) = 16\,x^3 - 20\,x$ | $x_3 = -0,5$

$f''(x_4) = 16 * (-0,5^3) - 20*(-0,5) = +8$

+ 8 > 0 ⇨ **Minimum**

x_1 bis x_4 in f(x) ergibt den Extrempunktkoordinaten P(x|y)

$f(x) = 4/5\,x^5 - 10/3\,x^3 + 9/4\,x$ | $x_1 = 1,5$

$f(x_1) = 4/5 *1,5^5 - 10/3*1,5^3 + 9/4*1,5 = -1,8$

$f(x) = 4/5\,x^5 - 10/3\,x^3 + 9/4\,x$ | $x_2 = -1,5$

$f(x_2) = 4/5 *(-1,5)^5 - 10/3*(-1,5)^3 + 9/4*(-1,5) = +1,8$

$f(x) = 4/5\,x^5 - 10/3\,x^3 + 9/4\,x$ | $x_3 = 0,5$

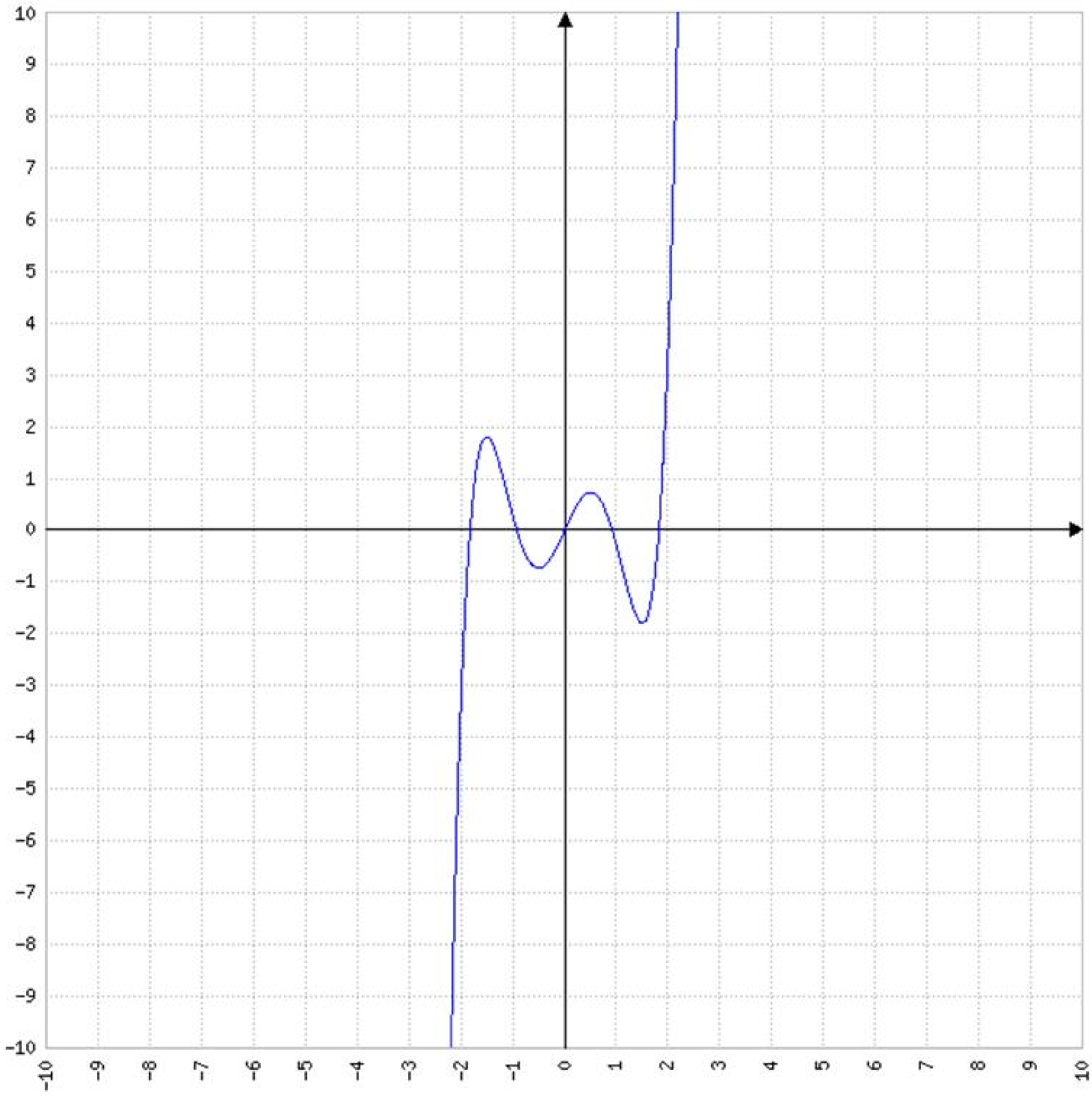
$f(x_3) = 4/5 *(0,5)^5 - 10/3*(0,5)^3 + 9/4*(0,5) = +0,73$

$f(x) = 4/5\,x^5 - 10/3\,x^3 + 9/4\,x$ | $x_4 = -0,5$

$f(x_4) = 4/5 *(-0,5)^5 - 10/3*(-0,5)^3 + 9/4*(-0,5) = -0,73$

HP1(-1,5I1,8) ; TP1(1,5I-1,8) ; HP2(0,5I0,73) ; TP3(-0,5I-0,73)

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de



Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

1.1.1 Anwendungsaufgaben zu Hoch-/Tiefpunkten (Extremwerten)

1.1.1.1 Aufg1: Nullstellen berechnen OHNE Zeichnung?

Beispiel: Umsatzfunktion, Kostenfunktion und Gewinnfunktion
Ein Unternehmen produziert Bohrhämmer, die zu einem Stückpreis von 120 € verkauft werden. x sei die Stückzahl der pro Tag hergestellten Maschinen. Der Tagesumsatz wird durch die Funktion $U(x) = 120x$ erfasst. Die täglichen Kosten können durch die Funktion K(x) angenähert beschrieben werden:
$K(x) = 0{,}0001\,x^3 - 0{,}15\,x^2 + 105\,x + 15\,000$ $(0 \leq x \leq 1800)$.

a) Skizzieren Sie die Graphen der Kosten-, der Umsatz- und der Gewinnfunktion in einem gemeinsamen Koordinatensystem für $0 \leq x \leq 1800$.

b) In welchem Stückzahlbereich werden Gewinne gemacht? Für welche tägliche Stückzahl x wird der Gewinn maximal? Wie groß ist der maximale Gewinn?

Lösungsweg - Zunächst ein paar Erläuterungen zum Verständnis:

U(x) = 120€ * x

U(x) ist also das, was das Unternehmen täglich einnimmt (Umsatz) und ist nicht zu verwechseln mit dem Gewinn G(x),

G(x) = U(x) – K(x)

denn der Gewinn, das ist das Geld das übrig bleibt, wenn vom tägliche Umsatz U(x), die Produktions-Kosten K(x) abgezogen werden, die das Unternehmen hatte um die Bohrhämmer zu produzieren (Stromkosten, Arbeitslöhne etc.).

Hier werden die täglichen Produktionskosten mit folgender Funktion angegeben:

K(x) = 0,0001 x^3 - 0,15x^2 + 105 x + 15000

wobei noch angegeben wird: **(0 ≤ x ≤ 1800)**

Das heißt, x liegt für diese Funktion zwischen 0 und 1800.

Für uns ist dieser Hinweis wichtig, weil wir unser Koordinatensystem, in welches wir die Graphen einzeichnen sollen, an diesen x-y-Achs**maßen** (0 bis 1800) orientieren.

Lösung zu a):

Anmerkung:

Für die Lösung der Aufgabe ist das zeichnen der Graphen nicht notwendig.

Wer für diesen Aufgabenteil viel Zeit braucht, sollte daher ggf. zuerst den RechenTeil b) erledigen. Er bringt sicher mehr Punkte.

Um die drei Graphen zeichnen zu können macht man für jede der drei Funktionen einen xy-Wertetabelle und setzt x-Werte aus dem gegebenen Bereich 0 bis 1800 ein.

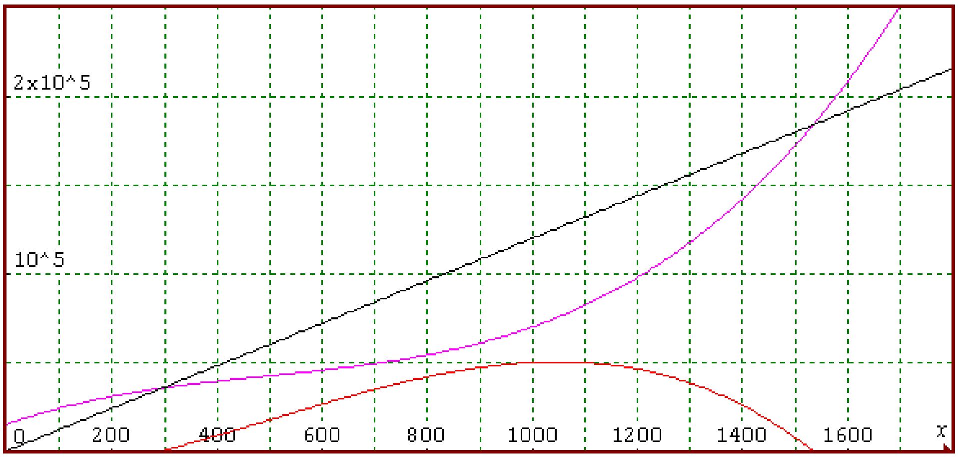
Damit ergebn sich die zugehörigen y-Werte des jeweiligen Funktionsgraphen, mit den xy-Wertepaaren kann der der jeweilige Graph gezeichnet werden:

1. Umsatz: $U(x) = 120\,x$

2. Kosten: $K(x) = 0{,}0001\,x^3 - 0{,}15x^2 + 105\,x + 15000$

3. Gewinn: $G(x) = U(x) - K(x) = 120\,x - (0{,}0001\,x^3 - 0{,}15x^2 + 105\,x + 15000)$

Die Graphen der 3 Funktionen sehen wie folgt aus :



die untere, rote , entspricht dem Gewinn

b) Gewinne werden zwischen den Nullstellen der roten Funktion gemacht, dies ist ungefähr zwischen 300 und 1520 Stück. Den Maximumgewinn errechnet man mit 1. Ableitung:

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

G(x) = U(x) – K(x)

$U(x) = 120\,x$

$K(x) = 0{,}0001\,x^3 - 0{,}15x^2 + 105\,x + 15000$

G(x) $= 120\,x - (0{,}0001\,x^3 - 0{,}15x^2 + 105\,x + 15000)$

Klammer auflösen

G(x) $= -\,0{,}0001\,x^3 + 0{,}15x^2 - 105\,x + 120\,x - 15000$

$\mathbf{G(x) = -\,0{,}0001\,x^3 + 0{,}15x^2 + 15\,x - 15000}$

Für diese Funktion sind nun Hoch- und Tiefpunkte zu berechnen

$G'(x) = -\,0{,}0003\,x^2 + 0{,}30x + 15$

1. Ableitung

$G'(x) = -\,0{,}0003\,x^2 + 0{,}30x + 15$

$G''(x) = -\,0{,}0006\,x + 0{,}30$

1. Ableitung ergibt x-Werte der HP und TP

2. Ableitung zeigt ob Max (HP) oder Min (TP)

$0 = -\,0{,}0003\,x^2 + 0{,}30x + 15$

$0 = +\,x^2 - 1000x - 50000$

Nullstellen bestimmen: **1. Ableitung = 0**

: – 0,0003

<u>pq-Formel</u> anwenden

$$x_{1/2} = -\left(\frac{p}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

p = –1000 ; **q** = – 50000

$$x_{1/2} = -\left(\frac{-1000}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{-1000}{2}\right)^2 + 50.000}$$

$$x_{1/2} = +500 \pm \sqrt{(-500)^2 + 50.000)}$$

$$x_1 = +500 + 547{,}72 = +1047{,}72$$

$$x_2 = +500 - 547{,}72 = -47{,}72$$

Kontrolle auf Min oder Max

$G''(x_1) = -\,0{,}0006\,x + 0{,}30 \quad | \; x_1 = 1047{,}72$

$G''(x_1) = -\,0{,}6286 + 0{,}30 = -\,0{,}9286 < 0$ ⇨ **Maximum**

Maxi bedeutet Hochpunkt (Gewinn) und heißt, dass bei diesem x-Wert (produzierte Stückzahl pro Tag) der größte Gewinn gemacht wird. Diesen größten Gewinn finden wir, indem wir Maxi $x_1 = 1047{,}72$ in die Ausgangsgleichung einsetzen:

<u>Anmerkung</u>: Auf **Mini**mum bzw. Tiefpunkt (Verlust) muss nicht kontrolliert werden, weil das in der Aufgabe nicht gefragt ist!

$G(x_1) = -\,0{,}0001\,x^3 + 0{,}15x^2 + 15\,x - 15000$

$x_1 = 1047{,}72$

G(x₁) = 50.363 €

Mit der Überprüfung erhält man also :

H.P. (1047,7 | 50363) Das heißt: Der größte Gewinn wird erzielt, wenn man ungefähr **1048 Stück pro Tag** produziert. Der Gewinn beläuft sich dann auf **50363 €**.