Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

Dieses und alle anderen Mathe-Dokumente unter

www.PaulGuckelsberger.de/Mathematik enthalten:

1. Mathematische Einführungen zur Grundlagen-Auffrischung

und/oder

2. Ergänzende Erläuterungen und Arbeitshilfen zu mathematischen Anwendungen innerhalb der studentischen Bachelor-/ Master-Praktika

sowie

3. Erläuterungen, Anregungen und Lösungshilfen für den Nachhilfeunterricht Gymnasium (G8) – Realschule ab Kl. 5 bis Abi

Dieser Teil bezieht sich auf

Wahrscheinlichkeitsrechnung / Stochastik

Für alle G8-Gymn.-Jahrgangsstufen wird in erster Linie nach dem, wie ich finde, hervorragend aufgebauten Buch von Lambacher/Schweizer (Klett-Verlag) gerechnet. Ich möchte an dieser Stelle alle Mathematiklehrer, die nach diesem Buch arbeiten dürfen dringend empfehlen, ihre Schüler nicht mit zusätzlichen Kopien aus anderen Büchern zu verwirren. Die Lambacher/Schweizer Reihe ist aktuell auf G8 und pädagogisch hervorragend für eine nachhaltige Mathematikvermittlung ausgerichtet. Mit Trainings- und Vertiefungsteilen die keine zusätzlichen Kopien/Arbeitsblätter aus (meist veralteten) andern Quellen erforderlich machen.

Über Eure Meinung sowie Korrekturhinweise freue ich mich, auch wenn ich sicher nicht alles sofort umsetzen kann.

Achtung:* *Das Büchlein wird nie vollständig sein und ich richte mich bei der Arbeit nach dem, was den Schülern unter den Nägeln brennt und nicht nach den Kriterien, die ein Mathebuchverlag vorgibt…..ich versuche damit Mathefrust ein wenig entgegenzuwirken.

Hochschule RheinMain – FB A&B
University of Applied Sciences
Dipl.-Ing. P. Guckelsberger
Kurt-Schuhmacher-Ring 15
65197 Wiesbaden
Tel.: 0611/9495-1453 - Paul.Guckelsberger@hs-rm.de

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

Seite

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

1 WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG - STOCHASTIK

Wie wahrscheinlich es ist, dass du im Lotto die 6 Zahlen richtig tippen wirst, die bei der nächsten Lottoziehung aus 49 Zahlen (6aus49) gezogen werden, dass kannst Du echt berechnen.

Das ist es, womit sich die Wahrscheinlichkeitsrechnung – auch Stochastik genannt – beschäftigt.

„Wahrscheinlich“…, ja wahrscheinlich ist die Wahrscheinlichkeitsrechnung für Dich eines der schwierigen Mathe-Kapitel. Bei mir war es jedenfalls so. Liegt aber nicht unbedingt daran, dass Du und ich nicht aufgepasst haben, wenn der Lehrer an der Tafel was vor macht. Liegt eher daran, dass dieses Thema einfach zu einer Zeit kommt, wo man in Schule und Leben viel zu tun hat. Und weil man sich ja nicht um alles kümmern kann, fragt man nicht nach und denkt, dass guck ich mir 1 Woche vor der Arbeit mal richtig an.

Ist bei dem Thema aber nicht leicht, daher versuch in der Zeit wo es durchgenommen wird, wenigstens immer mal wieder eine Aufgabe so lange nachzuvollziehen (nachzufragen) bis Du sie verstanden hast

Ich fange hier einfach an, mit ein paar Aufgaben deren Lösungsweg ich meist sehr ausführlich mit Schülern erarbeitet habe. Also nicht erschrecken, wenn die ein oder andere Lösung sehr „umfangreich“ erscheint. Da steht viel im Lösungsweg, was nur dem Verständnis dienen soll und folglich in der Klausur nicht hingeschrieben werden muss/soll.

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

2 AUFGABENTYPEN DURCH „SCHLÜSSELWÖRTER“ ERKENNEN

Im Text der Aufgabenstellung findest du in der Regel immer das oder die Schlüsselwörter, die dir einen Hinweis auf den Aufgabentyp und damit auf den sinnvollsten und/oder schnellsten Lösungsweg geben.

Um solche Schlüsselwörter zu erkennen, musst Du echt versuchen die wichtigsten Grundregeln und Formeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung auswendig zu lernen und die Buchstaben und Worte (Vokabeln) die dabei vorkommen musst du ebenfalls kennen bzw. lernen.

Hier sammeln wir jetzt einfach Schlüsselwörter aus Aufgabentexten und geben dir einen Hinweis, was das Schlüsselwort dir sagen will/kann.

Schlüsselwort	Was sagt mir das Schlüsselwort?
Höchstens	
Mindestens	**Du musst mit der Gegenwahrscheinlichkeit (1-P) rechnen**. Siehe auch: http://www.lern-online.net/mathematik/stochastik/wahrscheinlichkeitsverteilung/signifikanztest-mit-dem-taschenrechner/

2.1 Ziehen mit und ohne Wiederholung

Aufgabe:

In einer Klasse mit 30 Schülern sollen 5 Freikarten auf verschiedene Arten verteilt werden. Bestimme für jede der Arten die Anzahl der Möglichkeiten.

A. Man wählt 5 Schüler mithilfe eines Glücksrads.

B. Man wählt 5 Schüler durch einzelnes Ziehen von Namensschildern.

A-Lösung:

Dabei bekommt jeder Schüler eine Zahl des Glücksrades zugeteilt. Somit kann jeder Schüler also bei der nächsten Glücksraddrehung noch einmal (wiederholt) gezogen werden, wenn das Glücksrad wieder auf seiner Zahl stehen bleibt. Es handelt sich hier also um den Fall:

Ziehen mit Wiederholung (mit Zurücklegen)

Du musst also die Formeln für **„Ziehen mit Wiederholung"** kennen (auswendig lernen) und hier anwenden:

Anzahl der Möglichkeiten/Kombinationen bei Ziehen **mit** Wiederholung: $\mathbf{n^k}$

$\mathbf{n^k}$ | hier $\mathbf{n}$ = 30 Schüler; $\mathbf{k}$ = 5 Ziehungen

$\mathbf{n^k}$ **= 30^5 Möglichkeiten = 24300.000**

Was guckst Du? Das ist echt so viel!: Es kann gezogen werden 1.Peter, 2.Steffi, 3.Alex, 4.Ronni, 5.Paul. oder Anstatt Peter ein anderer, sonst wie zuvor: 1.Max (anstatt Peter), 2.Steffi, 3.Alex, 4.Ronni, 5.Paul. Und so weiter….

B-Lösung:

Jedes Schülernamensschild ist nur einmal im Topf. Jeder Schüler kann also bei der nächsten Ziehung nicht mehr gezogen (ohne Wiederholung) werden. Es handelt sich hier also um den Fall:

Ziehen ohne Wiederholung (ohne Zurücklegen)

Du musst die Formeln für „Ziehen ohne Wiederholung" kennen (auswendig lernen) und hier anwenden:

Anzahl der Möglichkeiten/Kombinationen bei Ziehen **ohne** Wiederholung:

$$\binom{n}{k} = \frac{n*(n-1)*\ldots.*(n-k+1)}{k*(k-1)*\ldots*1} = \frac{n!}{k!*(n-k)!}$$

$$\binom{30}{5} = \frac{30*(5-1)*\ldots.*(30-5+1)}{5*(5-1)*\ldots*1} = \frac{n!}{k!*(n-k)!}$$

$$\binom{30}{5} = \frac{30*29*28*27*26}{5*4*3*2*1} = 4060\ \textit{Möglichkeiten}$$

Berechnet mit CASIO FX 991 :
Eingabe: 30 SHIFT nCr 5
Display: *30C5*
Ergebnis: $=$ *4060*

2.2 Glücksradaufgaben

Ein Glücksrad

Ein Glücksrad weist acht gleich große Sektoren auf, die mit den Ziffern 1 bis 8 belegt sind.

Das Rad wird zweimal gedreht.

Stelle folgende Ereignisse als Ergebnismengen unter Angabe der möglichen Zahlenpaare dar und Bestimme die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

a) A: Beide Zahlen sind durch 4 teilbar

B: Die Augensumme beider Zahlen beträgt 8

$A \cup B$

$A \cap \overline{B}$

b) Nun wird das Glücksrad viermal gedreht. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle gedrehten Zahlen Quadratzahlen sind (Ereignis C).

Lösung

Grundlagen zum Lösungsweg

Um die Aufgaben lösen zu können musst du wissen was mit den Fragen gemeint ist:

A: Beide Zahlen sind durch 4 teilbar

Zwischen den Glücksradzahlen 1 und 8 sind das nur die Zahlen

E = 4 und 8

B: Die Augensumme beider Zahlen beträgt 8

Also:

E = 1+7; 2+6; 3+5; 4+4;

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

$A \cup B$

***Vereinigung** der Mengen A und B*

$A \cap \overline{B}$

***Durchschnitt** der Mengen A und B mit Komplement der Menge B*

Zu b): Was um Himmelswillen sind denn Quadratzahlen ?

Ziehst Du aus einer Zahl (z.B. aus 9) die Wurzel (man nennt das Wurzelziehen auch Radizieren) und ergibt sich dabei eine „ganze Zahl" z.B.: $\sqrt{9} = 3$

, so war die Zahl unter der Wurzel (hier 9) eine Quadratzahl, also:

Quadratzahlen = Zahlen deren Wurzel eine ganze Zahl ist.

Oder anders herum: Wenn man eine ganze Zahl quadriert, so bekommt man als Ergebnis eine Quadratzahl: Die ersten drei Quadratzahlen sind z.B. 1, 4 und 9, denn:

1^2 = Quadratzahl 1; 2^2 = Quadratzahl 4; 3^2 = Quadratzahl 9

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

Zur Lösung von A;

A: Beide Zahlen sind durch 4 teilbar

Zwischen 1 und 8 sind das nur die Zahlen **4 und 8**

1 Glücksrad-Spiel besteht also aus 2 Drehungen.

Welche möglichen Zahlenpaare ergeben sich nun nach einem Spiel bzw. nach 2 Drehungen, wenn jede der beiden Zahlen durch 4 teilbar sein soll, also jede der beiden Zahlen ein 4 oder eine 8 ist:

a. Mögliche Paarungen:

Beispiel:

Drehung-**1**von2 ergibt 4

Drehung-**2**von2 ergibt 8

Sowohl 4 wie 8 sind durch 4 teilbar, gehören also zu unseren „günstigen Ergebnisse“

Insgesamt können sich nach je 2 Drehungen folgende „günstige Ergebnisse (Zahlenpaare) für A einstellen:

A = { (4|4), (4|8), (8|4), (8|8)}

|E| = { 4 } = Anzahl der günstigen Ergebnisse *(man kann auch |A| statt |E| schreiben)*

b. Welcher ErgebnisBetrag |Ω| kann insgesamt auftreten?

Jedes Zahlenpaar ist das Ergebnis von einem Spiel/Versuch = 2 Drehungen.

Wenn Du alle Möglichkeiten aufschreibst, siehst Du das es 64 Möglichkeiten sind: **2 Drehungen = 1 Spiel können folgende Ergebnsisse bringen:**

(1|1), (1|2), (1|3), (1|4), (1|5), (1|6), (1|7), (1|8) = 8 Möglichkeiten
(2|1), (2|2), (2|3), (2|4), (2|5), (2|6), (2|7), (2|8) = 8 Möglichkeiten
(3|1), (3|2), (3|3), (3|4), (3|5), (3|6), (3|7), (3|8) = 8 Möglichkeiten

(4|1), (4|2), (4|3), (4|4), (4|5), (4|6), (4|7), (4|8) = 8 Möglichkeiten

(5|1), (5|2), (5|3), (5|4), (5|5), (5|6), (5|7), (5|8) = 8 Möglichkeiten

(6|1), (6|2), (6|3), (6|4), (6|5), (6|6), (6|7), (6|8) = 8 Möglichkeiten
(7|1), (7|2), (7|3), (7|4), (7|5), (7|6), (7|7), (7|8) = 8 Möglichkeiten
(8|1), (8|2), (8|3), (8|4), (8|5), (8|6), (8|7), (8|8) = 8 Möglichkeiten

Also: Anzahl aller möglichen Ergebniss |Ω| = 64 Möglichkeiten

c. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit P (A), dass die günstigen Ergebnisse von „A“ eintreten?

$$P(A) = \frac{|E| \text{ Anzahl der für A günstigen Ergebnisse}}{|\Omega| \text{ Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

$$P(A) = \frac{4}{64} = \frac{1}{16} = \mathbf{0{,}0625} = 0{,}0625 * 100 = \mathbf{6{,}25}\%$$

Zur Lösung von B;

B: Die Augensumme beider Zahlen beträgt 8

Mögliche Paarungen für „B“:

Beispiel Spiel-1:

Drehung-**1**von2 ergibt 5

Drehung-**2**von2 ergibt 3

Die Augensumme von 4+3 ist 8. Damit gehören die beiden Zahlen aus Spiel-1 (5|3) zu unseren „günstigen Ergebnisse“. Insgesamt können sich nach je 2 Drehungen folgende „günstige Ergebnisse (Zahlenpaare) für B einstellen:

B = { (1|7), (7|1), (2|6), (6|2), (3|5), (5|3), (4|4)}

|E| = { 7 } = Anzahl der günstigen Ergebnisse

Welcher ErgebnisBetrag |Ω| kann insgesamt auftreten?

Jedes Zahlenpaar ist das Ergebnis von einem Spiel/Versuch = 2 Drehungen.

Wie in Aufgabe „A“ so ist auch hier **|Ω| = 64**

$$\mathrm{P(A)} = \frac{|E| \text{ Anzahl der für B günstigen Ergebnisse}}{|\Omega| \text{ Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

$$\mathrm{P(A)} = \frac{7}{64} = \frac{1}{16} = \mathbf{0,109} = \mathbf{10,9}\ \%$$

Zur Lösung von: Vereinigung der Mengen A und B

Vereinigungsmenge = **A ∪ B** = { Alle Mengen aus A und Alle Mengen aus B}

A ∪ B = { (1|7), (7|1), (2|6), (6|2), (3|5), (5|3), (4|4), (4|8), (8|4), (8|8)}

|E| = { 10 } = Betrag-Anzahl der für **A ∪ B** günstigen Ergebnisse

$$P(A \cup B) = \frac{|E| \text{ Anzahl der für } \mathbf{A \cup B} \text{ günstigen Ergebnisse}}{|\Omega| \text{ Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

Mit |E| = { 10 } = Anzahl der für A ∪ B günstigen Ergebnisse

Und

| Ω | Anzahl aller möglichen Ergebnisse = 64. Der | Ω | bleibt gleich, weil sich am Glücksrad nichts ändert (es hat nach wie vor 8 Sektoren) und weil auch die Anzahl der Drehungen/Spiele (2mal) gleich bleibt.

$$P(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \frac{10}{64} = \frac{5}{32} = \mathbf{15{,}63\ \%}$$

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

Zur Lösung: Durchschnitt Menge A mit der Gegenereignismenge $\overline{B}$

$\mathbf{A \cap \overline{B}}$

Was bedeutet der Strich über B?

Antwort:

Der Strich über B verlangt nach den Werten die das Gegenereignis zu den Werten sind, die sich im Ereignis B befinden. Das Gegenereignis zu einem Ereignis B enthält alle Elemente, die nicht Teil von B sind. Man kann auch sagen, dass das Gegenereignis B genau dann eintritt, wenn das Ereignis B nicht eintritt. Ereignis und Gegenereignis schließen sich daher gegenseitig aus. Alle Elemente des Ereignisses und seines Gegenereignisses zusammen ergeben die Menge des Ergebnisraums Ω = Alle möglichen Ergebnisse.

Wir suchen also als günstiges Ereignis den

Schnitt (gemeinsame Elemente) der **Menge A** mit der **Gegenereignismenge B**

A geschnitten mit B (oder: Der Durchschnitt von A und B) ist die Menge aller Elemente, die **sowohl in A als auch in B enthalten sind**.

Die Menge **A = { (4|4), (4|8), (8|4), (8|8)}**

Die Menge **B = {Alle Zahlenpaare die 8 ergeben}**

Die Menge $\overline{\mathbf{B}}$ **= {Alle Zahlenpaare die nicht 8 ergeben}**

Wir müssten jetzt also alle $\overline{B}$ = {Alle Zahlenpaare die nicht 8 ergeben} aufschreiben und daraus, die heraus-suchen die auch in der Menge A = { (4|4), (4|8), (8|4), (8|8)}enthalten sind. Das aufschreiben aller Zahlenpaare die nicht 8 ergeben ist aber recht aufwendig, weil die Menge $\overline{B}$ = {Alle Zahlenpaare die nicht 8 ergeben} doch recht viele Zahlenpaare beinhaltet. Daher ist es besser und schneller wenn **Tipp:** Wir einfach aus der kleinen Menge A = {(4|4), (4|8), (8|4), (8|8)} jene Paare suchen die **nicht** 8 ergeben. Das sind dann die in **A und** $\overline{\mathbf{B}}$ gemeinsam vorkommenden Zahlenpaare. In A gibt es die drei (rot dargestellte) Paare die nicht 8 ergeben:

Die Menge **A = { (4|4), (4|8), (8|4), (8|8)}**

Damit ist der **Durchschnitt** der Mengen $\mathbf{A \cap \overline{B}}$ **= {(4|8), (8|4), (8|8)}**

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

Viel aufwendiger wäre es, wenn ihr $\overline{B}$ = {Alle Zahlenpaare die nicht 8 ergeben}aufschreibt, wie ich es hier mal gemacht habe, um zu zeigen, was es an Mehraufwand bedeutet:

$\overline{B}$ = (1|2); (1|3), (1|4), (1|5), (1|6), (1|8)

(2|1); (2|2), (2|3), (2|4), (2|5), (2|8)
(3|1); (3|2), (3|3),……………(3|8)
(4|1);………………………...(4|8)
(5|1);………………………...(5|8)
(6|1);………………………...(6|8)
(7|2);………………………...(7|8)
(8|1); (8|2); (8|3); (8|4); (8|5); (8|6); (8|7); (8|8)

Damit gilt:

Günstige Ereignisse für $A \cap \overline{B}$: **$A \cap \overline{B}$ = {(4|8), (8|4), (8|8)}**

Betrag-Anzahl der für $A \cap \overline{B}$ günstigen Ereignisse: **| $A \cap \overline{B}$ | = { 3 }**

$$P(A) = \frac{|E| \text{ Anzahl der für } (A \cup \overline{B}) \text{ günstigen Ergebnisse}}{|\Omega| \text{ Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

Mit **|E| = { 3 }** = Anzahl der für **$A \cup \overline{B}$** günstigen Ergebnisse

Und

| Ω | = 64 Anzahl aller möglichen Ergebnisse. Der | Ω | bleibt gleich, weil sich am Glücksrad nichts ändert (es hat nach wie vor 8 Sektoren) und weil auch die Anzahl der Drehungen/Spiele (2mal) gleich bleibt.

$$P\left(\mathbf{A} \cup \overline{B}\right) = \frac{3}{64} = 4{,}69\,\%$$

Zur Lösung C: Glücksrad 4mal Drehen

Nun wird das Glücksrad **viermal** gedreht. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass **alle gedrehten Zahlen Quadratzahlen** sind (Ereignis C).

Wir fragen uns zuerst, welche Quadratzahlen kommen auf dem Glücksrad vor?

Das Glücksrad hat 8 Sektoren mit den Zahlen 1 bis 8

Wenn man eine ganze Zahl quadriert, bekommt man eine Quadratzahl.

Im Bereich 1 bis 8 sind das also nur zwei Zahlen:

1 ($1^2=1$) und **4** ($2^2=4$)

Die für „c“ günstigen Ereignisse sind also **c = {1, 4}**

Der Betrag-Anzahl günstiger Ereignisse ist: **|c| = { 2 }**

Die Wahrscheinlichkeit P (1 oder 4) je Drehung zu bekommen ist je Drehung

$$\mathrm{P}(\mathbf{1\ oder\ 4}) = \frac{2}{8}\ da\ wir\ 2\ ganz\ bestimmte\ Zahlen\ aus\ 8\ Zahlen\ erhalten\ möchten$$

Da es 4 Drehungen sind, werden die Einzelwahrscheinlichkeiten multipliziert:

$$Für\ 4mal\ drehen: \mathrm{P}(\mathbf{1\ oder\ 4}) = \frac{2}{8} * \frac{2}{8} * \frac{2}{8} * \frac{2}{8} = \frac{1}{256} = \mathbf{0{,}39}\ \%$$

2.3 Ein Glücksrad enthält...

Ein Glücksrad enthält 9 gleich große Sektoren, die von 1 bis 9 nummeriert sind.

a) Das Glücksrad wird einmal gedreht.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt sich eine gerade Zahl?

b) Das Glücksrad wird zweimal gedreht.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein Pasch (zwei gleiche Zahelen) gedreht?

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt sich aus den gedrehten Zahlen die Summe 16?

Lösung zu a)

Anzahl der Möglichkeiten = 9 Sektoren

Anzahl der Drehungen je Spiel = 1

Damit errechnet sich

| Ω | Anzahl aller möglichen Ereignisse:

| Ω | = 9^1 = 9

Jetzt brauchen wir noch

a = **Alle** für „a" **günstigen** Ereignisse = hier alle geraden Zahlen wischen 1 und 9

Gerade Zahlen sind alle Zahlen die ohne Rest durch 2 teilbar sind: 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12 usw.

a = { (2), (4), (6), (8) }

Betrag-Anzahl aller für **"a"** **günstigen** Ereignisse:

|b| = { 4 }

$$P(A) = \frac{|a| \text{ Anzahl der für } \mathbf{a} \text{ günstigen Ergebnisse}}{|\Omega| \text{ Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

Mit |a| = { 4 } = Anzahl der für b günstigen Ergebnisse

Und

| Ω | Anzahl aller möglichen Ergebnisse = 9

$$P(\mathbf{b}) = \frac{4}{9} = 0{,}444 = \mathbf{44{,}4\ \%}$$

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

Lösung zu b)

Anzahl der Möglichkeiten = 9 Sektoren

Anzahl der Drehungen je Spiel = 2

Damit errechnet sich die

Anzahl aller möglichen Ereignisse:

$|\Omega| = 9^2 = 81$

Jetzt brauchen wir noch

b = **Alle** für „b" **günstigen** Ereignisse

b = {(1|1), (2|2), (3|3), (4|4), (5|5), (6|6), (7|7), (8|8), (9|9)}

Betrag-Anzahl aller für **"b" günstigen** Ereignisse:

|b| = **{ 9 }**

$$P(A) = \frac{|b| \text{ Anzahl der für } \mathbf{b} \text{ günstigen Ergebnisse}}{|\Omega| \text{ Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

Mit |b| = { 9 } = Anzahl der für b günstigen Ergebnisse

Und

| Ω | Anzahl aller möglichen Ergebnisse = 81

$$P(\mathbf{b}) = \frac{9}{81} = \frac{1}{9} = 0{,}111 = \mathbf{11{,}1\%}$$

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

2.4 Baumdiagramme

Stehen auf einer Speisekarte drei verschiedene Vorspeisen, vier verschiedene Hauptgerichte und zwei Desserts.

Wie viele verschiedene Essen können zusammengestellt werden. Stellen sie neben der rechnerischen Lösung auch eine Baumdiagrammlösung dar.

Lösung

1. Rechnerisch:

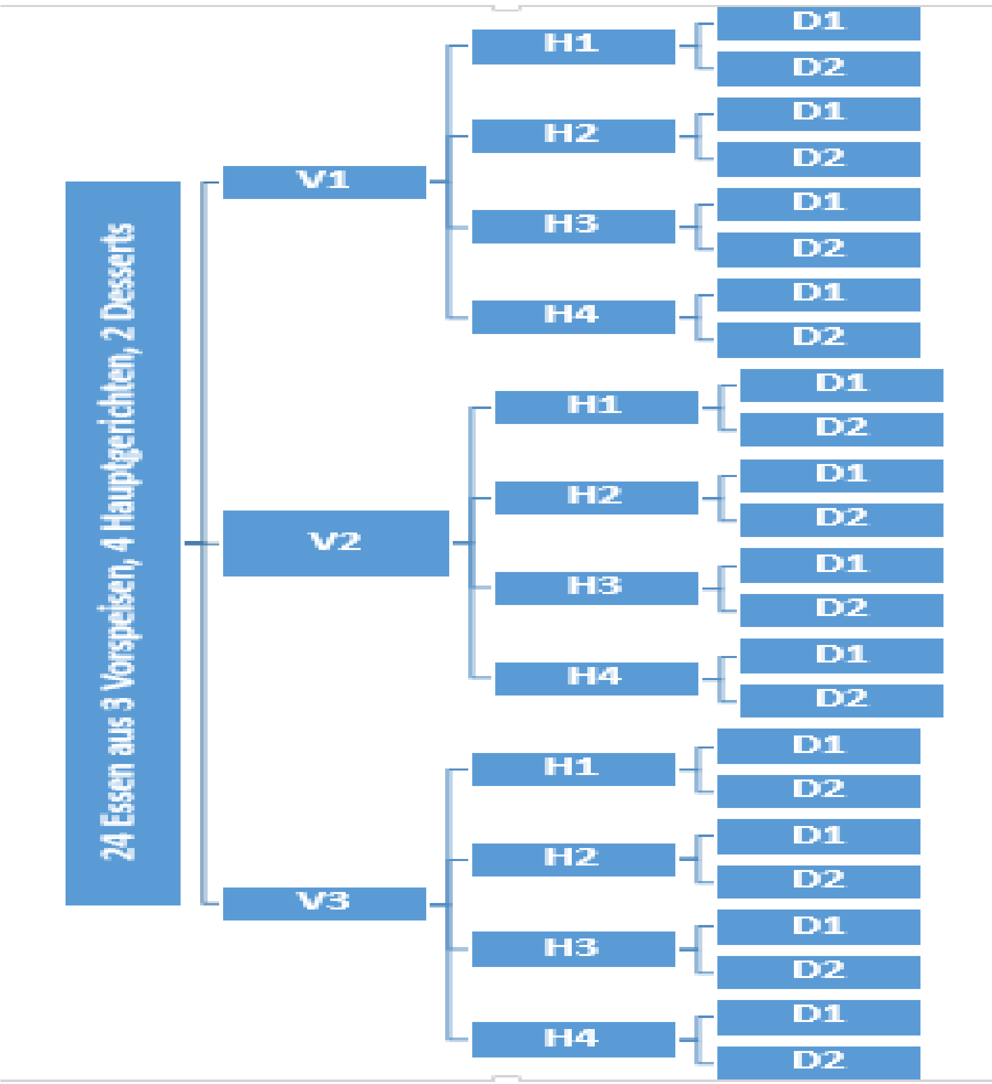
Man kann aus 3 Vorspeisen, 4 Hauptgerichten, 2 Desserts insgesamt:

3V * 4H * 2D = **24 Essen** zusammenstellen

2. Baumdiagramm:

Darstellbar durch ein Baumdiagramm mit

3 Verzweigungen (Vorspeisen) auf der 1. Stufe
4 Verzweigungen (Hauptspeisen) auf der 2. Stufe
2 Verzweigungen (Desserts) auf der 3. Stufe



Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

Aufgabe:

2.5 In einer Lostrommel befinden sich 10 Lose.....

In einer Lostrommel befinden sich 10 Lose, von denen 5 Nieten sind.
Es werden drei Lose ohne Zurücklegen gezogen.
X sei die Anzahl der gezogenen Gewinne.
a) Zeichne ein Baumdiagramm
b) Stelle die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X auf.

Lösung

Lösungsweg finden:

a. ***Wahrscheinlichkeitsverteilung***
b. ***Ziehen ohne Zurücklegen: Das heißt der Lostrommelinhalt ändert sich von Zug zu Zug***

Geg.: **n = 10 Lose**

5 Nieten

k = 3 Ziehungen = 1 Spiel

Ziehen ohne Zurücklegen

Berechnet/Überlegung: Wenn 5 von 10 Losen Nieten sind, dann sind **auch 5 Gewinne in der Trommel**

Art der „Wahrscheinlichkeitsverteilung“ ermitteln:

Fall-1:

Wenn ***1 Versuch/Spiel = 2 mögliche Ergebnisse haben kann nach denen wir suchen***

Dann ***BernoulliBinoVerteilung:*** $P(\mathbf{E}) = \binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k}$

Fall-2:

Wenn ***1 Versuch/Spiel > 2 mögliche Ergebnisse haben kann nach denen wir suchen***

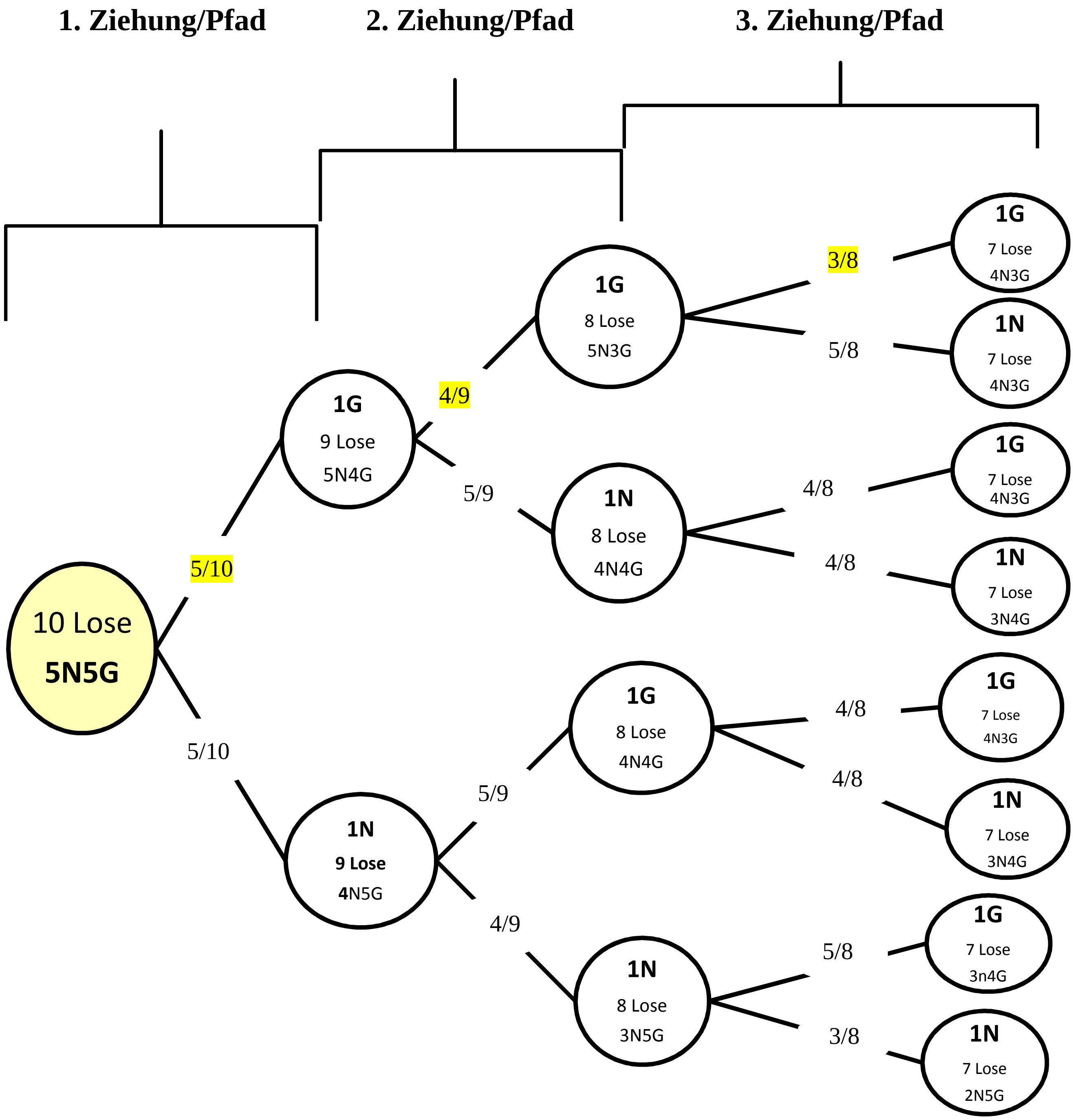
Dann ***NormalVerteilung:*** $P(X=xi) = \dfrac{|E| \text{ Anzahl der für } \mathbf{xi} \text{ günstigen Ergebnisse}}{|\Omega| \text{ Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$

Hier Fall-2: ***1 Versuch hat > 2 mögliche Ergebnisse: G|G, N|N, G|N etc.***
Also keine BinoVerteilung, sondern:

$$P(X=xi) = \frac{|E|}{|\Omega|}$$

Lösung b)

Baumdiagramm für 3 Ziehungen ohne Zurücklegen



$$P(\{\mathbf{NNN}\}) = \frac{5}{10} * \frac{4}{9} * \frac{3}{8} * = \frac{60}{720} = 0{,}0833 = 2{,}33\ \%$$

Multiplikation der Wahrsch entlang eines Pfades/Zuges im Baumdiagramm

Hier am Bsp des Pfades NNN, das heißt, dass 3mal hintereinander eine Niete (1N) gezogen wird, ohne dass diese wieder Zurückgelegt wird. Die Trommel hat also nach jedem Zug ein Los der Arte „Niete“ weniger.

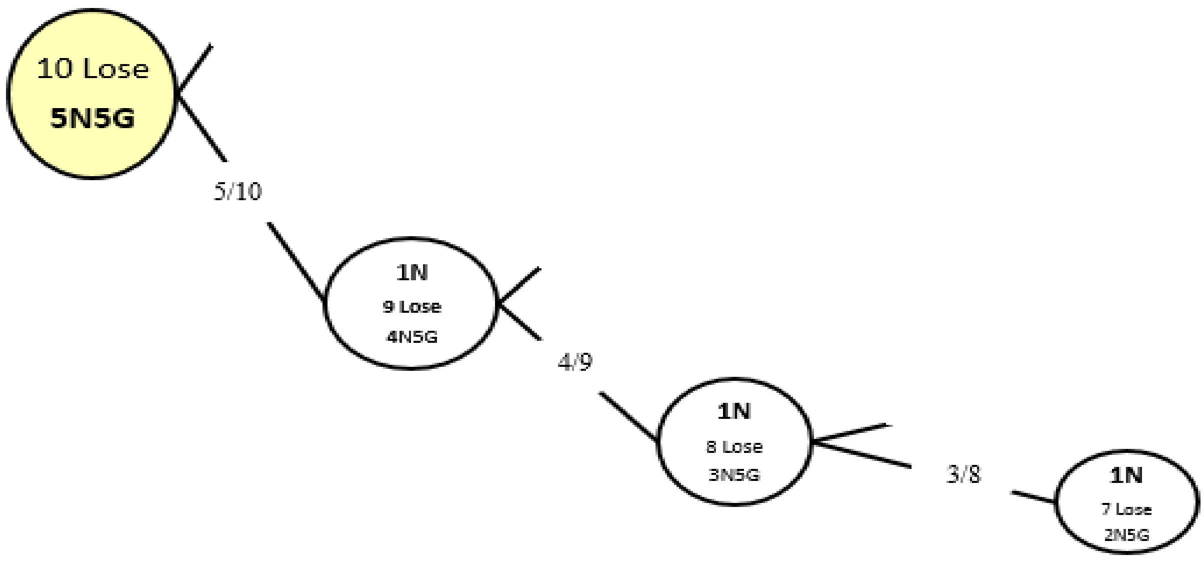
<u>1. Zug:</u> Trommelinhalt **5N+5G**: **1N**iete wird gezogen. Wahrscheinlichkeit dafür ist also **5N**ieten zu 10 Losen (5/10). In der Trommel befinden sich jetzt noch 4N+5G

<u>2. Zug:</u> Trommelinhalt **4N**+5G: **1N**iete wird gezogen. Wahrscheinlichkeit dafür ist jetzt **4N**ieten zu **9** Losen (4/9). In der Trommel befinden sich jetzt noch 3N+5G

<u>3. Zug:</u> Trommelinhalt **3N**+5G: **1N**iete wird gezogen. Wahrscheinlichkeit dafür ist jetzt **3N**ieten zu **8** Losen (3/8). In der Trommel befinden sich jetzt noch 2N+5G

Die W das bei 3 Zügen je eine 1 Niete gezogen wird ist:

$$P(\{\mathbf{NNN}\}) = \frac{5}{10} * \frac{4}{9} * \frac{3}{8} * = \frac{60}{720} = 0{,}0833 = 2{,}33\ \%$$



So ist mit allen Kombinationen zu verfahren:

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

$$P(\{\mathbf{NNN}\}) = \frac{5}{10} * \frac{4}{9} * \frac{3}{8} * = \frac{60}{720} = \ 0{,}0833 = 2{,}33\ \%$$

$$P(\{\mathbf{NNG}\}) = \frac{5}{10} * \frac{4}{9} * \frac{5}{8} * = \frac{100}{720} = \ 0{,}1388 = 13{,}90\ \%$$

$$P(\{\mathbf{NGN}\}) = \frac{5}{10} * \frac{5}{9} * \frac{4}{8} * = \frac{100}{720} = \ 0{,}1388 = 13{,}90\ \%$$

$$P(\{\mathbf{GNN}\}) = \frac{5}{10} * \frac{5}{9} * \frac{4}{8} * = \frac{100}{720} = \ 0{,}1388 = 13{,}90\ \%$$

$$P(\{\mathbf{GNG}\}) = \frac{5}{10} * \frac{5}{9} * \frac{4}{8} * = \frac{100}{720} = \ 0{,}1388 = 13{,}90\ \%$$

$$P(\{\mathbf{GGN}\}) = \frac{5}{10} * \frac{4}{9} * \frac{5}{8} * = \frac{100}{720} = \ 0{,}1388 = 13{,}90\ \%$$

$$P(\{\mathbf{GGG}\}) = \frac{5}{10} * \frac{4}{9} * \frac{3}{8} * = \frac{60}{720} = \ 0{,}0833 = 2{,}33\ \%$$

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

3 BINOMINALVERTEILUNG

3.1 Die Geburt eines Jungen…

Die Geburt eines Jungen hat eine Wahrscheinlichkeit von ca. 51,4 %.
Eine Familie hat 5 Kinder.
Berechne die Wahrscheinlichkeit dass es 3 Jungen und 2 Mädchen werden.

Lösung

Es folgt eine Schnell-Lösung, so, wie Du sie in der Klausur machen solltest

Zum besseren Verständnis folgt danach eine erklärende Explaining-Lösung

Schnell-Lösung

Das Ergebnis eines Versuches hat genau 2 Ausgänge: 1. Junge oder 2. Mädchen.
Damit ist meist die Binominalverteilung von Bernoulli anzuwenden:

$P(\mathbf{X} = \mathbf{k}) = \binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k}$

Oder, weil **X** = **k**, kann die Formel auch ohne "k" geschrieben werden:

$P(\mathbf{X}) = \binom{n}{X} * p^X * (1-p)^{n-X}$

Oder für **(1-p)** einfach **q** schreiben. Dabei ist **q = (1-p)** die Gegenwahrscheinlichkeit von p

$P(\mathbf{E}) = \binom{n}{k} * p^k * q^{n-k}$

Bedeutung der Formelzeichen:

p = **0,514** Erfolgswahrscheinlichkeit für 1 Versuch (hier: P (x =1 Junge) = 51,40%)
1-p = 1-0,52 = **0,486** = Misserfolgswahrscheinlichkeit (Gegenereignis). Hier: Mädchen
X = **k** = **3** = Anzahl der Erfolge (hier Anzahl der Jungen)
n = **5** = Anzahl der Versuche

$P(\mathbf{X} = \mathbf{k}) = \binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k}$

$P(\mathbf{X} = 3) = \binom{5}{3} * 0{,}514^2 * (1-0{,}514)^{5-3}$

$P(\mathbf{X} = 3) = 10 * 0{,}514^2 * 0{,}486^2$

$P(\mathbf{X} = 3) = 10 * 0{,}264 * 0{,}236$

$P(\mathbf{X} = \mathbf{2}) = 0{,}6230 = 62{,}30\%$

$\binom{2}{2}$ die 2 über 2 ist ja $\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{k}! * (\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!}$

Hier also $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! * (5-3)!}$

Berechnet mit CASIO FX 991 :
Eingabe: 5 SHIFT nCr 3
Display: *5C3*
Ergebnis: $= 10$

Antwort:

Wenn bei n = 1 Geburt die Wahrscheinlichkeit p (Junge) = 51,4% ist, dann kommt es bei n = 5 Geburten mit einer p (Seitenlage) = 62,30% dazu, dass genau 3mal ein Junge geboren wird und Wahrscheinlichkeit das 2 Mädchen geboren werden ist 100-62,30 = 37,70%

Die **durchschnittliche Wahrscheinlichkeit** (hier p (Seitenlage) 52%) für 1 Junge bei 1 Geburt ist bei mehr Geburten/Versuchen wahrscheinlicher als die Wahrscheinlichkeit bei **genau 1 Geburt.**.

3.2 Die Geburt eines Jungen…

Die Geburt eines Jungen hat eine Wahrscheinlichkeit von ca. 52 %.
X sei die Anzahl von Jungen in einer Familie mit exakt zwei Kindern.
Stelle die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X auf.

Lösung

Es folgt eine Schnell-Lösung, so, wie Du sie in der Klausur machen solltest

Zum besseren Verständnis folgt danach eine erklärende Explaining-Lösung

Schnell-Lösung

Wenn in der Aufgabenstellung das Wort „Wahrscheinlichkeitsverteilung" fällt, dann ist meist die Binominalverteilung von Bernoulli anzuwenden:

$$P(\mathbf{X = k}) = \binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k}$$

Oder, weil X = k, kann die Formel auch ohne "k" geschrieben werden:

$$P(\mathbf{X}) = \binom{n}{X} * p^X * (1-p)^{n-X}$$

Oder für **(1-p)** einfach **q** schreiben. Dabei ist **q = (1-p)** die Gegenwahrscheinlichkeit von p

$$P(\mathbf{E}) = \binom{n}{k} * p^k * q^{n-k}$$

Bedeutung der Formelzeichen:

p = ErfolgsWahrscheinlichkeit (hier: Jungen)
1-p = **q** = Gegenwahrscheinlichkeit = Misserfolgs-Wahrscheinlichkeit (hier: Mädchen)
X = **k** = Anzahl der Erfolge bzw. gesuchte TrefferAnzahl (hier Anzahl der Jungen X = ?)
n = GesamtAnzahl der Versuche (hier n = 2 Kinder)

$$P(\mathbf{X}) = \binom{n}{X} * p^X * (1-p)^{n-X}$$

$$P(\mathbf{X}) = \binom{2}{X} * 0{,}52^X * (1-0{,}52)^{2-X}$$

$$P(\mathbf{X}) = \binom{2}{X} * \mathbf{0{,}52}^X * (\mathbf{0{,}48})^{2-X}$$

Mit

p (Erfolg = Jungen) = 52% = **0,52**

1 – p (Misserfolg = Mädchen) = 1 – 0,52 = **0,48** (48%)

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

Aufgaben-Frage:

Wie wahrscheinlich ist es nun, dass in einer Familie mit 2 Kindern genau 2mal Jungen geboren werdent?

Bedeutung der Formelzeichen:

p = **0,52** Erfolgswahrscheinlichkeit für 1 Versuch (hier: P (x =1 Seitenlage) = 30%)
1-p = 1-0,52 = **0,48** = Misserfolgswahrscheinlichkeit (Gegenereignis). Hier: Mädchen
X = **k** = **2** = Anzahl der Erfolge (hier Anzahl der Seitenlagen)
n = **2** = Anzahl der Versuche

$$P(\mathbf{X} = \mathbf{k}) = \binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k}$$

$$P(\mathbf{X} = \mathbf{2}) = \binom{2}{2} * 0{,}52^2 * (1-0{,}52)^{2-2}$$

$$P(\mathbf{X} = \mathbf{2}) = 1 * 0{,}52^2 * 0{,}48^0$$

$$P(\mathbf{X} = \mathbf{2}) = 1 * 0{,}2704 * 1$$

$$P(\mathbf{X} = \mathbf{2}) = 0{,}2704 = 27{,}04\%$$

$\binom{2}{2}$ die 2 über 2 ist ja $\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{k}! * (\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!}$

Hier also $\binom{2}{2} = \frac{10!}{2! * (2-2)!}$

Berechnet mit CASIO FX 991 :
Eingabe: 2 SHIFT nCr 2
Display: *2C2*
Ergebnis: $= 1$

Antwort:

Wenn bei n = 1 Geburt die Wahrscheinlichkeit p (Junge) = 52% ist, dann kommt es bei n = 2 Geburten mit einer p (Seitenlage) = 27,04% dazu, dass genau 2mal ein Junge geboren wird.

Man sieht, die **durchschnittliche Wahrscheinlichkeit** (hier p (Seitenlage) 52%) für ein bestimmtes Ereignis (hier 1 Junge bei 1 Geburt) ist meist höher (Wahrscheinlicher) als die **genau Wahrscheinlichkeit** dafür, dass der Durchschnittswert auch wirklich bei mehreren Versuchen (hier n = 2) erreicht wird.

Explaining-Lösung

Du musst dich mit den Themen und Formeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Stochastik) beschäftigen, damit du in der Aufgabenstellung „Schlüsselwörter" findest, die dir meist den besten Hinweis auf die schnellste Lösungsstrategie geben.
Also:
1. Suche nach „Schlüsselwörtern", die dir einen Hinweis darauf geben, welche Formel und welcher Fall der Wahrscheinlichkeitsrechnung hier am schnellsten zum Ergebnis führt:
„Wahrscheinlichkeitsverteilung"
Das Wort deutet darauf hin, dass du hier die Formeln und Regeln der Binominalverteilung anwenden kannst. Nur gut, dass du die schon auswendig gelernt hast:
2. Dann weist du, dass es bei der Geburt genau „zwei" mögliche Ergebnisse gibt: Junge oder Mädchen. Und dass ist wieder ein Hinweis darauf, dass hier die Regeln/Formeln der Binominalverteilung gelten könnten, denn:

Ein Experiment, bestehend aus einer Folge von n Teilversuchen, bei dem jeder Teilversuch (jede Geburt) genau zwei mögliche Versuchsausgänge Junge oder Mädchen) besitzt und jeder Versuch unter genau den gleichen Voraussetzungen abläuft, heißt n-stufiges Bernoulli-Experiment oder Bernoulli-Kette.
Eine Zufallsvariable X heißt binomialverteilt mit den Parametern n und p, wenn gilt:

Binominalverteilung = n-stufiger Bernoulli-Versuch

$$P(\mathbf{X} = \mathbf{k}) = \binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k}$$

Oder, weil X = k, kann die Formel auch ohne "k" geschrieben werden:

$$P(\mathbf{X}) = \binom{n}{X} * p^X * (1-p)^{n-X}$$

Bedeutung der Formelzeichen:

p = Erfolgs-Wahrscheinlichkeit (hier: Jungen)
1-p = Misserfolgs-Wahrscheinlichkeit (hier: Mädchen)
X = k = Anzahl der Erfolge (hier Anzahl der Jungen X = ?)
n = Anzahl der Versuche (hier n = 2 Kinder)

Oft wirst Du auch finden:

E = Erfolgswahrscheinlichkeit : p (E) = p
E' = Misserfolgswahrscheinlichkeit : P (E') = 1-p

$$P(\mathbf{X}) = \binom{n}{X} * p^X * (1-p)^{n-X}$$

$$P(\mathbf{X}) = \binom{2}{X} * 0{,}52^X * (1-0{,}52)^{2-X}$$

$$P(\mathbf{X}) = \binom{2}{X} * \mathbf{0{,}52^X} * (\mathbf{0{,}48})^{\mathbf{2-X}}$$

Mit

p (Erfolg = Jungen) = 52% = **0,52**

1 – p (Misserfolg = Mädchen) = 1 – 0,52 = **0,48** (48%)

3. Bestimmung einer rechtsseitigen Intervallwahrscheinlichkeit: P(X _ k)

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

3.3 Ein Biathlet trifft die Scheibe …

Ein Biathlet trifft die Scheibe mit einer Wahrscheinlichkeit von 90%.
Er gibt 10 Schüsse ab.
Berechne die Wahrscheinlichkeit für mindestens 8 Treffer.

Lösung

- *Das Ergebnis eines Versuches hat genau 2 Ausgänge: 1. Treffer oder 2. Fehlschuss.*
- *Bei jedem neuen Versuch/Schuss können wieder nur genau diese 2 Ausgänge vorkommen, es handelst sich also um den Fall „Ziehen mit Zurücklegen".*
- *Damit ist die Binomialverteilung von Bernoulli anzuwenden*
- *Schlüsselwort „mindestens" deutet auf Anwenden der komulativen Bernoulli-Formel für $P(X \geq k)$ hin. Man spricht bei diesem Fall auch von „Bestimmung einer rechtsseitigen Intervallwahrscheinlichkeit $P(X \geq k)$*

p = 0,90	EinzelErfolgsW'keit für 1 Versuch (hier: P (x =1 Schuss) = 90%) = p ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis eintritt
1-p = q = 1-0,90 = **0,10**	Gegen-/Misserfolgs-Wahrscheinlichkeit Hier: > 2 Treffer
X ≥ k = a = 8	Anzahl Treffer die wir erzielen wollen (hier „mindesten" **8mal** Scheibentreffer)
n = 10 =	Anzahl der Versuche, auch Länge der Bernoulli-Kette genannt
P(X ≥ k)	sagt, dass wir die Wahrscheinlichkeit für ≥ k Treffer errechnen wollen
$P(\mathbf{X} \geq \mathbf{k}) = \sum_{k=a}^{n} \binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k}$	*Bilde die Summe (addiere) von a = k (8) nach n (10) für den Term $\binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k}$ Also hier den Term 3mal addieren: 1.Term mit k=8, 2.Term mit k=9, 3.Term mit k=10 oder Schneller: Formel direkt in CASIO fx991 eingeben*

$$P(\mathbf{X} \geq \mathbf{k}) = \sum_{k=8}^{10} \binom{10}{8} * 0{,}90^8 * (1-0{,}90)^{10-8} = 0{,}9295 = 92{,}95\%$$

Antwort:

Bei einer Einzelw'keit von 90% (1 Schuss ist zu 90% ein Treffer) wird der Biathlet bei 10 Schüssen eine „mindestens 8 Treffer-Wahrscheinlichkeit von 92,95% haben.

Das war die schnelle Lösung, wie Du sie in der Klausur machen solltest. Wenn Dein Lehrer diese Formel nicht will, dann halt ausführlicher so:

$$P(\mathbf{X} \geq \mathbf{k}) = \binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k} + \binom{n}{k+1} * p^{k+1} * (1-p)^{n-(k+1)} + \dots \text{bis } k+1 = n \text{ erreicht ist!}$$

$$P(\mathbf{X} \geq \mathbf{8}) = \binom{10}{8} * p^8 * (1-p)^{10-8} + \binom{10}{9} * p^9 * (1-p)^{10-9} + \binom{10}{10} * p^{10} * (1-p)^{10-10}$$

$$P(\mathbf{X} \geq \mathbf{8}) = \binom{10}{8} * 0{,}9^8 * (1-0{,}9)^2 + \binom{10}{9} * 0{,}9^9 * (1-0{,}9)^1 + \binom{10}{10} * 0{,}9^{10} * (1-0{,}9)^0$$

$$P(\mathbf{X} \geq \mathbf{8}) = 45 * 0{,}430 * 0{,}01 + \mathbf{10} * 0{,}387 * 0{,}1 + 1 * 0{,}349 * 1$$

$$P(\mathbf{X} \geq \mathbf{8}) = 0{,}1935 + 0{,}387 + 0{,}349$$

$$P(\mathbf{X} \geq \mathbf{8}) = 0{,}9295 = 92{,}95\%$$

3.4 Weitere Hilfen zum Verständnis komulativer Binominalverteilung

4 Fälle (Schlüsselwörter) musst du dir merken:

1. „Genau“ k-mal: ***P(X = k)***
2. „Höchstens“ k-mal: ***P(X ≤ k)***
3. „Mindestens“ k-mal: ***P(X ≥ k)***
4. „Mindestens“ k-mal „und“ „höchstens“ (k+i)-mal Wappen: ***P(k ≤ X ≤ n)***

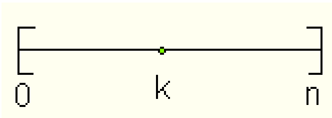
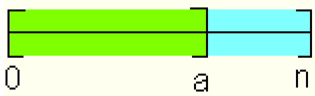
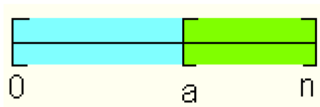
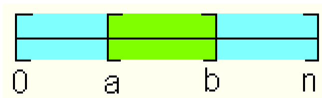
Schau auch mal hier:

http://matheguru.com/stochastik/164-bernoulli-kette.html

Schau auch mal hier:

http://brinkmann-du.de/mathe/gost/stoch_01_11.htm

Wir unterscheiden folgende Fälle:

„Genau“ k-mal: ***P(X = k)*** $P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$	**Am CASIO fx991 ist „x“ für „k“ einzugeben!** 
„Höchstens“ k-mal: ***P(X ≤ k)*** $P(X\le k)=\sum_{k=0}^{a}\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$	Untere Grenze **a** **Bsp.:** Tetraederwürfel trägt die Zahlen 1-4. Berechne die W‘keit, dass beim **n** = 6 Werfen des Würfels höchstens **a** = 2mal die Zahl 3 geworfen wird 
„Mindestens“ k-mal: ***P(X ≥ k)*** $P(X\ge k)=\sum_{k=a}^{n}\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$	Untere Grenze **a** **Bsp.:** Biathlet trifft Scheibe mit Wahrscheinlichkeit von 90%. Er gibt **n** = 10 Schüsse ab. Berechne die Wahrscheinlichkeit für mindestens **a** = 8 Treffer. 
„Mindestens“ k-mal **„und“** **„höchstens“** (k+i)-mal Wappen: ***P(k ≤ X ≤ n)*** $P(a\le X\le b)=\sum_{k=a}^{b}\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$	Obere Grenze **b** (b ≥ a) 

Schau auch mal hier:

http://www.mathematik.ch/anwendungenmath/wkeit/binomialvert.php

Aufgabe http://www.paulguckelsberger.de/Mathematik.htm

3.5 Aus einer Urne, die 3 blaue und 5 schwarze Kugeln ……

Aus einer Urne, die 3 blaue und 5 schwarze Kugeln enthält, werden mit einem Griff drei Kugeln gezogen. Für jede gezogene Blaue Kugel erhält der Spieler 3 €. Der Spieleinsatz beträgt 3 €. Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X, die jedem Spielergebnis den Gewinn/Verlust zuordnet und stellen Sie diese graphisch dar.

Schnelle Lösung

„**B**“ steht für Blaue Kugel; „**S**“ steht für Schwarze Kugel

Xi	SSS = **-3 Euro** (= 0-3 = Gewinn – Einsatz)	BSS = **0 Euro** (= 3-3 = Gewinn – Einsatz)
P(X=xi)	$\binom{3}{0} * \frac{5}{8} * \frac{4}{7} * \frac{3}{6} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{28}} = 0{,}1786$	$\binom{3}{1} * \frac{3}{8} * \frac{5}{7} * \frac{4}{6} = \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{28}} = 0{,}5357$

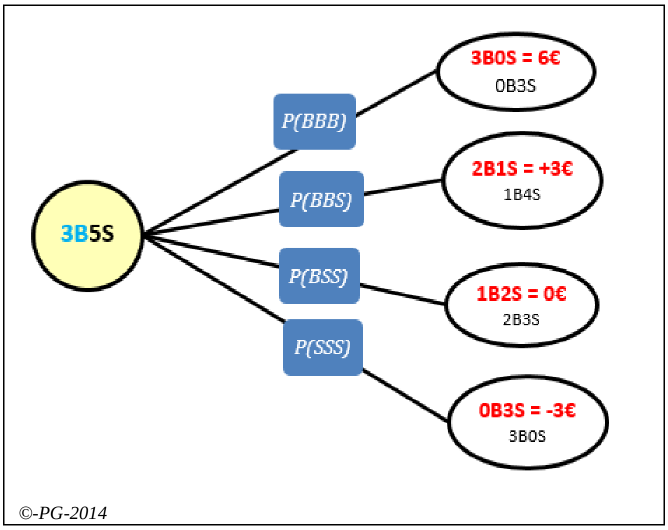
Xi	BBS = **3 Euro** (= 6-3 = Gewinn – Einsatz)	BBB = **6 Euro** (= 9-3 = Gewinn – Einsatz)
P(X=xi)	$\binom{3}{2} * \frac{3}{8} * \frac{2}{7} * \frac{5}{6} = \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{56}} = 0{,}2679$	$\binom{3}{3} * \frac{3}{8} * \frac{2}{7} * \frac{1}{6} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{56}} = 0{,}0179$

Ausführliche Lösung

(1) Es werden **n = 1mal 3 Kugeln gezogen, ohne weiteres Ziehen**. Es handelst sich also um den Fall: **Ziehen ohne Zurücklegen**

(2) Du überlegst jetzt „**Welche Kombinationen von Kugelfarben können vorkommen**“, wenn Du mit einem Griff 3 Kugeln aus der Urne holst, in der sich ja 3 Blaue und 5 Schwarze Kugeln, also insgesamt 8 Kugeln befinden.

Das kann mit einem Baumdiagramm oder einfaches auflisten geschehen. In vielen Fällen ist das Baumdiagramm sehr hilfreich, bei dieser Aufgabe allerding nicht so sehr. Dennoch, weil es anschaulich ist und zur Übung, hier das Baumdiagramm rechts:



Danach gibt es 4 Gewinne/Verluste und zwar:
BBB = 9-3 = **6 €**
BBS = 6-3 = **3 €**
BSS = 3-3 = **0 €**
SSS = 0-3 = **-3 €**
Die Wahrscheinlichkeiten P (X = xi) der einzelnen Pfade für P (x1 = BBB) etc. werden nachfolgend ermittelt:

$$P(X = xi) = \frac{|E| \text{ Anzahl der für xi günstigen Ergebnisse}}{|\Omega| \text{ Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

Der **Nenner dieser Formel**, die **|Ω| Anzahl aller möglichen Ereignisse**, wenn 3 aus 8 Kugeln gezogen werden:

$\boldsymbol{Insgesamt\ gibt\ es}\ \binom{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}$ Möglichkeiten

Der **Zähler dieser Formel**, die **|E| Anzahl der für xi günstigen Ereignisse**, wenn also bei den 3 gezogenen Kugeln eine, zwei oder gar drei Blaue Kugeln dabei sind, erhält man wie folgt:

$Wenn\ man\ von\ 3B\ und\ 5S\ Kugeln,\quad 3B + 0S\ greift\ \ gibt\ es\ \binom{3}{3} * \binom{5}{0} = 1$ Möglichkeiten

$$Also\quad P(\boldsymbol{BBB = 6€}) = \frac{\binom{3}{3} * \binom{5}{0}}{\binom{8}{3}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{56}} = 0{,}0179 = 1{,}79\%$$

$Wenn\ man\ von\ gesamt\ 3B\ und\ 5S\ genau\ 2B + 1S\ greift\ \ so\ gibt\ es\ \binom{3}{2} * \binom{5}{1}$ Möglichkeiten

$$Also\quad P(\boldsymbol{BBS}) = \frac{\binom{3}{2} * \binom{5}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{3 * 5}{56} = \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{56}} = 0{,}2679 = 26{,}79\%$$

$Wenn\ man\ von\ 3B\ und\ 5S\ genau\ 1B + 2S\ greift\ \ so\ gibt\ es\ \binom{3}{1} * \binom{5}{2}$ Möglichkeiten

$$Also\quad P(\boldsymbol{BSS}) = \frac{\binom{3}{1} * \binom{5}{2}}{\binom{8}{3}} = \frac{3 * 10}{56} = \frac{30}{56} = \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{28}} = 0{,}5357 = 53{,}57\ \%$$

$Wenn\ man\ von\ 3B\ und\ 5S\ genau\ 0B + 3S\ greift\ \ so\ gibt\ es\ \binom{3}{0} * \binom{5}{3}$ Möglichkeiten

$$Also\quad P(\boldsymbol{SSS}) = \frac{\binom{3}{0} * \binom{5}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{1 * 10}{56} = \frac{10}{56} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{28}} = 0{,}1786\ \%$$

Aufgabe:

3.6 Mindestens und höchstens Aufgaben: Berechne wie oft ein Würfel mindestens

Berechne wie oft ein Würfel mindestens geworfen werden muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% mindestens eine Zwei fällt.

Lösungshilfen: http://matheguru.com/stochastik/216-mindestwahrscheinlichkeit.html

Lösung

Es folgt eine Schnell-Lösung, so wie Du sie in der Klausur machen solltest und eine zum besseren Verständnis eine anschließend eine erklärende Explaining-Lösung:

Lösungsweg finden:

1. ***Nach einem Schlüsselwort suchen***
2. ***Herausfindest ob es mehrere Wege/Arten gibt das Schlüsselwort zu berechnen.***

Geg.: **a = 95% (0,95) Mindestwahrscheinlichkeit für mindestens eine 2**

Ges.: **n = ? damit mit p mindestens eine 2 kommt**

$$n \geq \frac{\ln(1-a)}{\ln(1-p)}$$

a = 0,95 = Mindestwahrscheinlichkeit die erreicht werden soll

p = 1/6 Wahrscheinlichkeit für „einen“ Treffer (Zahl 2 ist eine von sechs)

$$n \geq \frac{\ln(1-0{,}95)}{\ln\left(1-\frac{1}{6}\right)} = \mathbf{16{,}43}\ Versuche$$

Antwort: Ein Würfel muss 17mal geworfen werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% einmal eine 2 zu werfen.

Ähnliche Aufgabe: Gesucht: p Wahrscheinlichleit für mindestens 1 Treffer

Ein Würfel wird 7mal geworfen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit p, dass mindestens 1mal die Zahl 6 geworfen wird?

Die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Treffer ist die Gegenwahrscheinlichkeit für gar keinen Treffer:

$P(X \geq 1) = 1\text{-}(1\text{-}p)^n$

p = Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses

n = Anzahl der Durchführungen

$P(X \geq 1) = 1\text{-}(1\text{-}p)^n$

p = 1/6 = Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses
n = 7 = Anzahl der Durchführungen

$$P(X \geq 1) = 1\text{-}(1\text{-}\frac{1}{6})^7 = 0{,}721$$

Antwort: Die p das bei 7maligem Würfeln mindestens 1mal die 6 geworfen wird ist 72,1 %

Aufgabe

3.6.1 Ein Tetraederwürfel trägt die Zahlen 1-4. Berechne.....

Ein Tetraederwürfel trägt die Zahlen 1-4. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass beim sechsfachen Werfen des Würfels **höchstens** zweimal die Zahl 3 geworfen wird.

Lösung

Schlüsselwörter

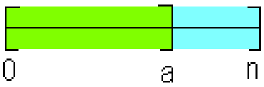
Würfel

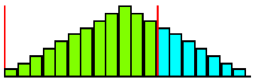
Würfeln, Glücksrad, Roulette, Ziehen mit Zurücklegen sind Hinweise dass es es sich um einen **Bernoulli-Prozess** handelt

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot \underbrace{(1-p)^{n-k}}_{\text{Gegenwahrscheinlichkeit}}$$

Höchstens

Weist darauf hin, dass du mit der BinoVertFormel eine Bernoullikette machen musst: Dazu hast Du einen Höchstwert für xi bzw. k (auch „a“ bezeichnet) z.B. die Zahl 3 soll höchstens k = xi = a = 2mal vorkommen, wenn ein Würfel 6mal geworfen wird. Du rechnest jetzt die BinoFormel in Intervallen von k = xi = a = 0, 1, 2 und addierst diese Ergebnisse dann zur gesuchten Wahrscheinlichkeit P(X≤ k) auf. Alternativ gibt es auch eine einzige Formel für P(X≤ k) die du direkt, wie unten gezeigt im CASIO fx 991 berechnen kannst.





Bei dieser Aufgabe wäre am Zahlenstrahl a = 2 und n = 6
Für die Berechnung wählt man bei „höchstens-Angaben“ dann Werte von a = k = xi = zwischen 0 und 2. Hier: 0,1,2

$$\mathrm{P}(\mathbf{X}\le\mathbf{k})=\binom{n}{k1}*0{,}25^{k1}*(0{,}75)^{6-k1}+\binom{n}{k2}*0{,}25^{k2}*(0{,}75)^{6-k2}+\binom{n}{k3}\ldots$$

p = ¼ = 0,25	EinzelErfolgsW‘keit für 1 Versuch (hier: P (x =1 Wurf) = 25%) = p ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis eintritt
1-p = q = 1-0,25 = **0,70**	Misserfolgswahrscheinlichkeit (Gegenereignis).Hier: > 2 Treffer
X ≤ k = 2	Anzahl Treffer die wir erzielen wollen (hier „höchstens“ **2mal** den 3er-Wurftreffer)
n = 6=	Anzahl der Versuche, auch Länge der Bernoulli-Kette genannt
P(X=k)	sagt, dass wir die Wahrscheinlichkeit für genau k Treffer errechnen wollen

$$\mathrm{P}(\mathbf{X}\le\mathbf{k})=\binom{6}{0}*0{,}25^0*(0{,}75)^{6-0}+\binom{6}{1}*0{,}25^1*(0{,}75)^{6-1}+\binom{6}{2}*0{,}25^2*(0{,}75)^{6-2}$$

$$\mathrm{P}(\mathbf{X}\le\mathbf{k})=1*1*0{,}178+6*0{,}25*0{,}237+15*0{,}0625*0{,}316=\mathbf{0{,}83=83\%}$$

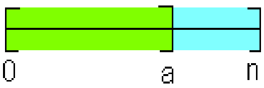
Antwort:

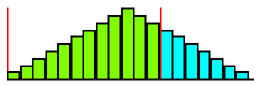
Mit einer Wahrscheinlichkeit von P = 83% wird beim sechsfachen Werfen des Tedraederwürfels höchstens zweimal die Zahl 3 geworfen.

Nachfolgende die Lösung über eine einzige Formel:

4 Fälle (Schlüsselwörter) musst du dir merken: 1. „Genau“ k-mal: ***P(X = k)*** 2. „Höchstens“ k-mal: ***P(X ≤ k)*** 3. „Mindestens“ k-mal: ***P(X ≥ k)*** 4. „Mindestens“ k-mal „und“ „höchstens“ (k+i)-mal Wappen: ***P(k ≤ X ≤ n)***	**Schau auch mal hier:** http://matheguru.com/stochastik/164-bernoulli-kette.html **Schau auch mal hier:** http://brinkmann-du.de/mathe/gost/stoch_01_11.htm **Schau auch mal hier:** **http://www.mathematik.ch/anwendungenmath/wkeit/binomialvert.php**

$$\boldsymbol{P(X \leq k) = \sum_{k=0}^{a} \binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k}}$$





$$\boldsymbol{P(X \leq k) = \sum_{k=0}^{a} \binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k}}$$

In Worten heißt diese Formel:
Bilde die Summe (addiere) von k=0 (0) nach a (2) für den Term $\binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k}$
Also hier den Term 3mal addieren: 1.Term mit k=0, 2.Term mit k=1, 3.Term mit k=2

$$P(X = k \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} \binom{6}{k} * 0{,}25^k * (1-0{,}25)^{6-k} = 0{,}830 = 83\%$$

Das kann direkt mit dem CASIO fx-991 ausgerechnet werden:

$\boxed{\text{Shift}}$ $\boxed{\text{log}}$ das Summenzeichen erscheint. Jetzt rechts scrollen und den unteren Wert (hier 0) eingeben. Nochmal rechts scrollen und oberen Wert (hier 2) eingeben. Links scrollen bis du im rechten Bereich des Summenzeichens bist. Gesamt n eingeben (hier 6). $\boxed{\text{Shift}}$ GeteiltTaste. Jetzt k bzw. x eingeben und zwar mit $\boxed{\text{Alpha}}$ $\boxed{)}$ mal 0,25 hoch $\boxed{\text{Alpha}}$ $\boxed{)}$ jetzt einmal rechts scrollen. $\boxed{(}$ 1-0,25 $\boxed{)}$ hoch 6-$\boxed{\text{Alpha}}$ $\boxed{)}$ Jetzt $\boxed{=}$ drücken. Ergebnis dauert etwas.

Hier das Video, wie man es in den Casio eingibt:

https://www.youtube.com/watch?v=BF5fJEEwvjM

Aufgabe:

3.7 Anwendung der Formel für das Gegenereignis: P(X > k) = 1 − P(X _ k)

3.7.1 Wirft man einen Reißnagel, so kommt er in 60% der Fälle

Wirft man einen Reißnagel, so kommt er in **60%** der Fälle in Kopflage und in **40%** der Fälle in Seitenlage zur Ruhe. Jemand wirft **zehn** dieser Reißnägel. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt er **mehr als dreimal** die Seitenlage?

Lösung

p = 0,60	EinzelErfolgsW'keit für 1 Versuch (hier: P (x =1 Schuss) = 90%) = p ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis eintritt
1-p = q = 1-0,60 = **0,40**	Gegen-/Misserfolgs-Wahrscheinlichkeit Hier: > Treffer
X > k = a = 4	Anzahl Treffer die wir erzielen wollen (hier mehr als 3mal, also *„mindesten"* **4mal** Scheibentreffer)
n = 10 =	Anzahl der Versuche, auch Länge der Bernoulli-Kette genannt
P(X > k)	sagt, dass wir die Wahrscheinlichkeit für > k Treffer errechnen wollen
$P(\mathbf{X} \geq \mathbf{k}) = \sum_{k=a}^{n} \binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k}$	***Bilde die Summe (addiere) von a = k (8) nach n (10) für den Term*** $\binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k}$ ***Also hier den Term 3mal addieren: 1.Term mit k=8, 2.Term mit k=9, 3.Term mit k=10 oder Schneller: Formel direkt in CASIO fx991 eingeben***

$$P(\mathbf{X} \geq \mathbf{k}) = \sum_{k=4}^{10} \binom{10}{k} * 0{,}60^k * (1-0{,}60)^{10-k} = 0{,}6177 = 61{,}77\%$$

Aufgabe:

3.8 Wird ein Reißnagel geworfen, fällt......

Wird ein Reißnagel geworfen, fällt er in 70% der Fälle auf den Kopf, in 30% der Fälle auf die Seite.
Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Reißnagel beim zehnmaligen Werfen mehr als zweimal in die Seitenlage fällt.

Lösung:

Gibt es bei 1 Versuch/Spiel = 2 mögliche Ergebnisse ? Bsp.: Eine Geburt = 2 mögliche Ergebnisse = Junge oder Mädchen	*Ja*	*Es handelt sich um Bernoulli-Versuch. Binomialverteilungs-Formel anwenden:* P(**E**)= $\binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k}$
Gibt es bei 1 Versuch/Spiel > 2 mögliche Ergebnisse ?	*nein*	P(X=xi) = $\frac{\text{\|E\| Anzahl der für } \textbf{xi} \text{ günstigen Ergebnisse}}{\text{\|Ω\| Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$

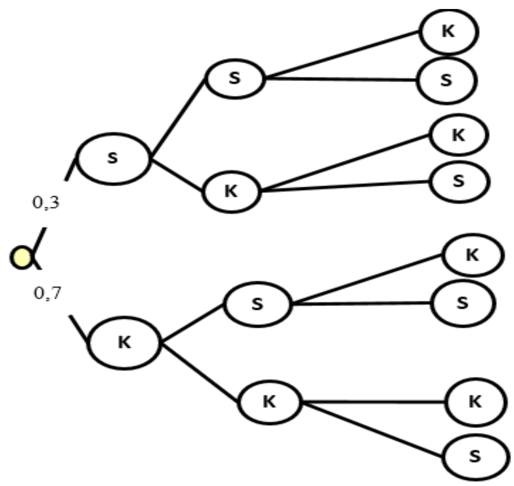
Geg.: n = 10 mal Werfen

n = 1mal werfen: 70% (0,70) Kopflage (K), 30% (0,30) Seitenlage

Ges.: P (10mal damit x > 2mal Seitenlage)

Abb. Rechts: Baumdiagramm bis Wurf (Pfad) 3

Das Baumdiagramm rechts zeigt nur 3 von 19 Reißnagel-Würfen. Für 10 Versuche/Würfe wäre es hier zu groß. Auf jedem Pfad wäre noch, wie beim ersten Pfad/Wurf die jeweilige Wahrscheinlichkeit (Kopflage K = 70% bzw. 0,7 und Seitenlage S = 30% bzw. 0,3, einzutragen.



p = 0,60	EinzelErfolgsW'keit für 1 Versuch (hier: P (x =1 Schuss) = 90%) = p ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis eintritt
1-p = **q** = 1-0,60 = **0,40**	Gegen-/Misserfolgs-Wahrscheinlichkeit Hier: > Treffer
X > k = a = 4	Anzahl Treffer die wir erzielen wollen (hier mehr als 3mal, also *„mindesten“* **4mal** Scheibentreffer)
n = 10 =	Anzahl der Versuche, auch Länge der Bernoulli-Kette genannt
P(X > k)	sagt, dass wir die Wahrscheinlichkeit für > k Treffer errechnen wollen
P(**X ≥ k**)= $\sum_{k=a}^{n} \binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k}$	*Bilde die Summe (addiere) von a = k (8) nach n (10) für den Term* $\binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k}$ *Also hier den Term 3mal addieren: 1.Term mit k=8, 2.Term mit k=9, 3.Term mit k=10 oder Schneller: Formel direkt in CASIO fx991 eingeben*

$$P(X \geq k) = \sum_{k=4}^{10} \binom{10}{k} * 0{,}60^k * (1-0{,}60)^{10-k} = 0{,}6177 = 61{,}77\%$$

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

Hier eine weitere Berechnung zu diesem Aufgabentyp;

Lösungshilfe*:** ***https://www.youtube.com/watch?v=QFtJdylnpXs

1. Erwartungswert bei BinoVerteilung:

Hier Seitenlage bei gegeben p(S) = 30% und n = 10 Würfen

$E(x) = \boldsymbol{n * p}$

n = 10 = Anzahl Versuche/Würfe

p = 0,30 = Erfolgswahrscheinlichkeit für Seitenlage = 30%

$E(x) = \mathbf{10 * 0,3} = \mathbf{3}$

Das heißt, im Durchschnitt kommt bei 10 Würfen rd. 3mal die Seitenlage S vor.

Aufgaben-Frage:

Wie wahrscheinlich ist es nun, dass bei 10 Würfen die Seitenlage nicht wie oben berechnet im Durchschnitt E(x) = 3mal, sondern mehr als 2mal, also genau 3mal auftritt?

Diese genaue Wahrscheinlichkeit errechnet sich über die Binomialverteilung, die ja angewendet wird, wenn ein Versuch genau 2 mögliche Ergebnisse hat. Hier: 1. Kopflage oder 2. Seitenlage (oder Geburt: Junge/Mädchen; Münzwurf: Wappen/Zahl)

Bedeutung der Formelzeichen:

p = **0,30** Erfolgswahrscheinlichkeit für 1 Versuch (hier: P (x =1 Seitenlage) = 30%)
q = (1-p) = 1-0,30 = **0,70** = Misserfolgswahrscheinlichkeit (Gegenereignis). Hier: Anzahl Kopflagen
X = **k** = **3** = Anzahl der Erfolge (hier Anzahl der Seitenlagen)
n = **10** = Anzahl der Versuche (hier n = 10 Drehungen)

$$P(\mathbf{X}=\mathbf{k}) = \binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k}$$

$$P(\mathbf{X}=\mathbf{3}) = \binom{10}{3} * 0{,}3^3 * (1-0{,}3)^{10-3}$$

$$P(\mathbf{X}=\mathbf{3}) = 120 * 0{,}3^3 * 0{,}7^7$$

$$P(\mathbf{X}=\mathbf{3}) = 120 * 0{,}027 * 0{,}0824$$

$$P(\mathbf{X}=\mathbf{3}) = 0{,}2668 = 26{,}68\%$$

$\binom{10}{3}$ die 10 über 3 ist ja $\boldsymbol{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! * (n-k)!}}$

Hier also $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3! * (10-3)!}$

Berechnet mit CASIO FX 991 :
Eingabe: 10 SHIFT nCr 3
Display: *10C3*
Ergebnis: $= 120$

Antwort:

Wenn bei n = 1 Reißnagelwurf die Wahrscheinlichkeit p (Seitenlage) = 30% ist, dann kommt es bei n = 10 Reißnagelwürfen mit einer p (Seitenlage) = 26,68% dazu, dass genau 3mal die Seitenlage eintritt.

Man sieht, die **durchschnittliche Wahrscheinlichkeit** (hier p (Seitenlage) 30%) für ein bestimmtes Ereignis (hier 3 Seitenlagen bei 10 Würfen) ist meist höher (Wahrscheinlicher) als die **genau Wahrscheinlichkeit** dafür, dass der Durchschnittswert auch wirklich eintritt.

4 ZUFALLSGRÖßEN, ERWARTUNGSWERT UND VARIANZ

4.1 Bei einem Glücksspiel werden aus einer Urne, die 9 Kugeln...

Bei einem Glücksspiel werden aus einer Urne, die **9 Kugeln mit den Nummern 1 bis 9** enthält, nacheinander **3 Kugeln mit Zurücklegen** gezogen. Der Einsatz pro Spiel beträgt 0,50 €.
Bei drei Einsen werden 5 Euro ausgezahlt, bei zwei Einsen 2 € und bei einer Eins 1 €.
a) Welche langfristige Gewinnerwartung ergibt sich?
b) Wie muss der Einsatz verändert werden, damit das Spiel fair ist?

Schnell-Lösung

Also: **BernoulliBinoVerteilung:** $P(E) = \binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k}$

Bedeutung der Formelzeichen:

p = 1/9 EinzelErfolgsW'keit für **1** Ziehung/Versuch eine 1 aus 9 zu ziehen P (x =1) = 0,111 = 11,1%

q = (1-p) = 1-1/9 = **8/9** = MisserfolgsW'keit (Gegenereignis). Hier: alle Zahlen ≠ 1 (2 bis 9)

X = xi = ki = 0 bis 3 = Anzahl der Erfolge = **Anzahl gezogener Einsen pro Spiel (3 Ziehungen)**

n = 3 = Anzahl der Versuche pro Spiel (hier n = 3 Ziehungen sind 1 Spiel)

$$P(x1 = 0 \text{ Einsen}) = \binom{3}{0} * \left(\frac{1}{9}\right)^0 * \left(1-\frac{1}{9}\right)^{3-0} = \frac{512}{729} = 0{,}702 = 70{,}20\%$$

$$P(x2 = 1 \text{ Eins}) = \binom{3}{1} * \left(\frac{1}{9}\right)^1 * \left(1-\frac{1}{9}\right)^{3-1} = 3 * \frac{64}{729} = \frac{64}{243} = 0{,}263 = 26{,}3\,\%$$

$$P(x3 = 2 \text{ Einsen}) = \binom{3}{2} * \left(\frac{1}{9}\right)^2 * \left(1-\frac{1}{9}\right)^{3-2} = 3 * \frac{8}{729} \frac{8}{243} = 0{,}031 = 3{,}1\,\%$$

$$P(x4 = 3 \text{ Einsen}) = \binom{3}{3} * \left(\frac{1}{9}\right)^3 * \left(1-\frac{1}{9}\right)^{3-3} = \frac{1}{729} = 0{,}00137 = 0{,}14\,\%$$

Erwartungswert von X:
$$E(x) = \sum x_i \cdot p_i$$

Aus Sicht des **Veranstalters**:
xi = jeweiliger Einsatz minus Auszahlung
pi = Wahrscheinlichkeit für xi

$$E(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + x_4 \cdot p_4$$

$$E(X) = (-0{,}5) * \frac{512}{729} + 0{,}5 * \frac{64}{243} + 1{,}5 * \frac{8}{243} + 4{,}5 * \frac{1}{729}$$

E (X) = - 0,16 € pro Spiel (3 Ziehungen) **!** Beim **fairen** Spiel ist **E = 0**. Dieses Spiel ist unfair.

Damit das Spiel fair ist, sollte der Einsatz = **0,16 €** pro Spiel betragen.

Explaining-Lösung

Wenn Du zu einem gesuchten Ereignis das Gegenereignis definieren kannst, dann kannst Du in der Regel die BinoVerteilFormel anwenden. Hier
Ereignis: Du ziehst die Nr. **1** dazu das **Gegenereignis**: Due ziehst eine Nr. **≠ 1**

Einsatz E = 0,5 €			
X = xi = k **Anzahl der Einsen** **(Ereignis) je Spiel** 3 Züge = 1 Spiel	**Zugehöriges Ergebnis**	Auszahlung A	Gewinn G G = A-E
3 Einsen	(1,1,1)	5 €	4,5 €
2 Einsen	(1,1, ≠1); (1, ≠1,1); (≠1,1,1)	2 €	1,5 €
1 Eins	(1, ≠1, ≠1); (≠1, ≠1,1); (≠1,1, ≠1)	1 €	0,5 €
0 Einsen	(≠1, ≠1, ≠1)	0 €	-0,5 €

Art der „Wahrscheinlichkeitsverteilung“ ermitteln:

Fall-1:

Wenn *1 Einzel-Versuch* ***= 2 mögliche*** *Ergebnisse haben kann nach denen wir suchen*

Dann *BernoulliBinoVerteilung:* P(**E**)= $\binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k}$

Fall-2:

Wenn *1 Einzel-Versuch* ***> 2 mögliche*** *Ergebnisse haben kann nach denen wir suchen*

Dann *NormalVerteilung:* P(X=xi) = $\frac{\text{|E| Anzahl der für } \mathbf{xi} \text{ günstigen Ergebnisse}}{\text{|Ω| Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$

Hier Fall-1: 1 Versuch **= 2 mögliche** Ergebnisse: **1 oder ≠1** Denn greifst du in die Urne dann hast Du in der Hand entweder die Kugel Nr. 1 und wenn es nicht die Kugel mit der Nummer 1 ist, dann ist es die Kugel mit der Nummer ≠ 1. Also genau 2 Möglichkeiten und für beide kennst du die Einzel-Wahrscheinlichkeit p:
P (Nr.1) = 1von 9 Kugeln = 1/9 und P(Nr. ≠1) = 8 von 9 Kugeln = 8/9

Also: BernoulliBinoVerteilung: P(E)= $\binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k}$

Bedeutung der Formelzeichen:

p = 1/9 EinzelErfolgsW‘keit für **1** Ziehung/Versuch eine 1 aus 9 zu ziehen P (x =1) = 0,111 = 11,1%

q = (1-p) = 1-1/9 = **8/9** = MisserfolgsW‘keit (Gegenereignis). Hier: alle Zahlen ≠ 1 (2 bis 9)

X = xi = ki = 0 bis 3 = Anzahl der Erfolge = **Anzahl gezogener Einsen pro Spiel (3 Ziehungen)**

n = 3 = Anzahl der Versuche pro Spiel (hier n = 3 Ziehungen sind 1 Spiel)

$$P(\mathbf{x1 = 0\ Einsen = -0,5€}) = \binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k}$$

$$P(x1 = 0\ Einsen) = \binom{3}{0} * \left(\frac{1}{9}\right)^0 * \left(1-\frac{1}{9}\right)^{3-0}$$

$$P(x1 = 0\ Einsen) = 1 * 1 * \left(\frac{8}{9}\right)^3$$

$$P(x1 = 0\ Einsen) = \frac{\mathbf{512}}{\mathbf{729}} = \mathbf{0,702} = 70,20\%$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! * (n-k)!}$$

$$\binom{3}{0} = \frac{3!}{0! * (3-0)!}$$

Berechnet mit CASIO FX 991 :
Eingabe: 3 SHIFT nCr 0
Display: 3*C0*
Ergebnis: = *1*

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

$$P(\mathbf{x2 = 1\ Eins = +0{,}5€}) = \binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k}$$

$$P(x2 = 1\ \text{Eins}) = \binom{3}{1} * \left(\frac{1}{9}\right)^1 * \left(1-\frac{1}{9}\right)^{3-1}$$

$$P(x2 = 1\ \text{Eins}) = 3 * \frac{1}{9} * \left(\frac{8}{9}\right)^2 = 3 * \frac{1}{9} * \frac{64}{81} = 3 * \frac{64}{729} = \mathbf{\frac{64}{243}} = 0{,}263 = 26{,}3\ \%$$

$$P(\mathbf{x3 = 2\ Einsen = +1{,}5€}) = \binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k}$$

$$P(x3 = 2\ \text{Einsen}) = \binom{3}{2} * \left(\frac{1}{9}\right)^2 * \left(1-\frac{1}{9}\right)^{3-2}$$

$$P(x3 = 2\ \text{Einsen}) = 3 * \frac{1}{81} * \left(\frac{8}{9}\right)^1 = 3 * \frac{8}{729}\ \mathbf{\frac{8}{243}} = 0{,}031 = 3{,}1\ \%$$

$$P(\mathbf{x4 = 3\ Einsen = +4{,}5€}) = \binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k}$$

$$P(x3 = 3\ \text{Einsen}) = \binom{3}{3} * \left(\frac{1}{9}\right)^3 * \left(1-\frac{1}{9}\right)^{3-3}$$

$$P(x3 = 3\ \text{Einsen}) = 1 * \frac{1}{729} * \left(\frac{8}{9}\right)^0 = 1 * \frac{1}{729} * 1 = \mathbf{\frac{1}{729}} = 0{,}00137 = 0{,}14\ \%$$

Erwartungswert von X:

$$\mathbf{E\ (x) = \sum x_i \cdot p_i}$$

Aus Sicht des **Veranstalters**:
xi = jeweiliger Einsatz minus Auszahlung
pi = Wahrscheinlichkeit für xi

$$E\ (X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + x_4 \cdot p_4$$

$$E\ (X) = (-0{,}5) * \frac{512}{729} + 0{,}5 * \frac{64}{243} + 1{,}5 * \frac{8}{243} + 4{,}5 * \frac{1}{729}$$

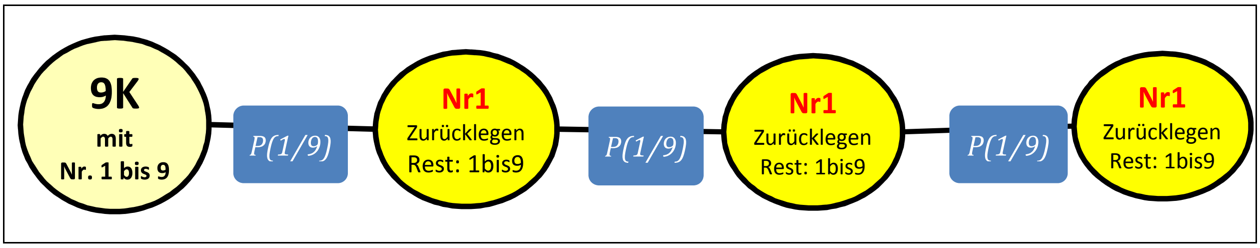
E (X) = - 0,16 € pro Spiel (3 Ziehungen) **!** Beim **fairen** Spiel ist **E = 0**. Dieses Spiel ist unfair.

Damit das Spiel fair ist, sollte der Einsatz = **0,16 €** pro Spiel betragen.

Für diese Aufgabe, hier noch eine Variante der möglichen Pfade:

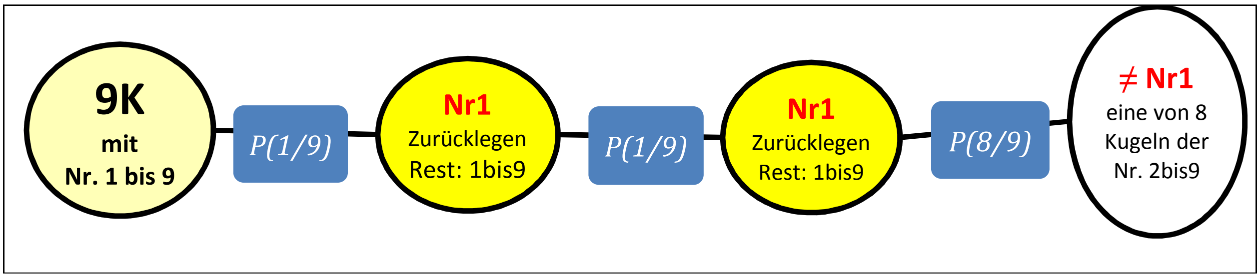
3mal die Eins in einem Spiel kann **1mal** vorkommen mit: **(1|1|1)**

$$4{,}5€\ \text{Gewinn bei}\ P(\mathbf{1|1|1}) = \mathbf{1*}\ \frac{1}{9} * \frac{1}{9} * \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{9}\right)^3 = \mathbf{\frac{1}{729}}$$



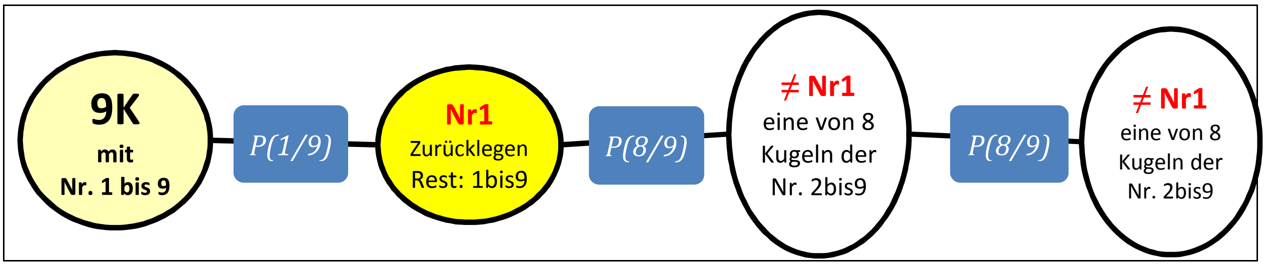
2mal die Eins in einem Spiel kann **3mal** vorkommen mit: **(1|1|≠1); (1|≠1|1); (≠1|1|1)**

$$1{,}5€ \text{ Gewinn bei } P(\mathbf{1}|\mathbf{1}| \neq \mathbf{1}) = \mathbf{3*}\frac{1}{9} * \frac{1}{9} * \frac{8}{9} = 3 * \left(\frac{1}{9}\right)^2 * \frac{8}{9} = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{243}}$$



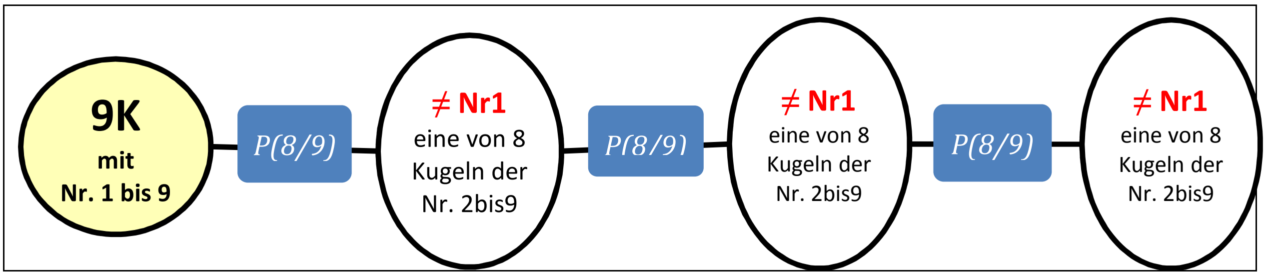
1mal die Eins in einem Spiel kann **3mal** vorkommen mit: **(1|≠1|≠1); (≠1|≠1|1); (1|≠1|≠1)**

$$0{,}5€ \text{ Gewinn bei } P(\mathbf{1}| \neq \mathbf{1}| \neq \mathbf{1}) = \mathbf{3*}\frac{1}{9} * \frac{8}{9} * \frac{8}{9} = 3 * \frac{1}{9} * \left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{\mathbf{64}}{\mathbf{243}}$$



0mal die Eins in einem Spiel kann **1mal** vorkommen mit: **(≠1|≠1|≠1)**

$$-0{,}5€ \text{ Verlust bei } P(\neq \mathbf{1}| \neq \mathbf{1}| \neq \mathbf{1}) = \frac{8}{9} * \frac{8}{9} * \frac{8}{9} = \left(\frac{8}{9}\right)^3 = \frac{512}{729}$$



Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

5 WAHRSCHEINLICHKEITSVERTEILUNG FÜR X

5.1 Ein Glücksrad mit vier gleich großen Sektoren...

Das Glücksrad mit vier gleich großen Sektoren, auf denen die Ziffern 1, 2, 3 und 4 stehen, wird zweimal gedreht. Der Spieler muss 0,50 € Einsatz pro Spiel zahlen und erhält als Auszahlung 5€ bei Summe der gedrehten Zahlen = 8; 3€ bei Summe der gedrehten Zahlen = 7 und 1€ bei Summe der gedrehten Zahlen = 6.
Ges: Wahrscheinlichkeitsverteilung für X: „Gewinn des Spielers pro Spiel in €" dar.

Lösung

Art der „Wahrscheinlichkeitsverteilung" ermitteln:

Fall-1:

Wenn *1 Versuch/Spiel = 2 mögliche Ergebnisse haben kann nach denen wir suchen*

Dann *BernoulliBinoVerteilung:* $P(E) = \binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k}$

Fall-2:

Wenn *1 Versuch/Spiel > 2 mögliche Ergebnisse haben kann nach denen wir suchen*

Dann *NormalVerteilung:* $P(X=xi) = \frac{|E| \text{ Anzahl der für } \mathbf{xi} \text{ günstigen Ergebnisse}}{|\Omega| \text{ Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$

Hier Fall-2: ***1 Versuch/Spiel hat > 2 mögliche Ergebnisse, da 4 Sektoren getroffen werden können. Also keine BinoVerteilung, sondern:***

$$P(X=xi) = \frac{|E|}{|\Omega|}$$

2. Überlegung: *Gewinn = Auszahlung – Einzahlung. Also:*
x_1 = 5€-0,5€=4,5€; x_2=3-0,5=2,5€; x_3=1-0,5=0,5€; x_4=0-0,5=-0,5€

$$P(X=xi) = \frac{|E| \text{ Anzahl der für } \mathbf{xi} \text{ günstigen Ergebnisse}}{|\Omega| \text{ Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

Für diese Formel jetzt **|Ω|** und **|E(xi)|** ermitteln:

X: Gewinn in €, **xi** = hier ein bestimmter €-Betrag (x1 = 4,5, x2 = 2,5, x3 = 0,5, x4 = -0,5€)

P (X=xi) = Wahrscheinlichkeit das der für xi stehende €-Betrag gewonnen wird.

|E(xi)| Betrag-Anzahl der für xi günstigen Ergebnisse

| **Ω** | Anzahl aller möglichen Ergebnisse

| Ω | Anzahl aller möglichen Ergebnisse

| Ω | Anzahl aller Möglichkeiten/Kombinationen bei **Drehen/Ziehen mit Wiederholung =** $\mathbf{n^k}$

Hier: Jeder der 4 Sektoren, kann bei jeder neuen Drehung wieder getroffen werden

| Ω | = $\mathbf{n^k}$

| Ω | = $\mathbf{4^2}$ **= 16 Möglichkeiten**

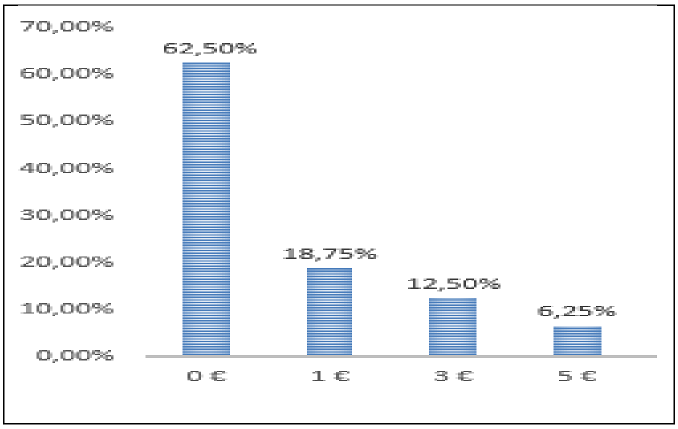
n = 4 Sektoren; **k** = 2 Drehungen

|E(xi)| Betrag-Anzahl der für xi günstigen Ergebnisse:

∑ und Zahlenpaare mit Gewinn	*Betrag-Anzahl der für xi günst. Ergebn.*	*Wahrscheinlichkeit P des für xi günstigen Ergebnisses*
4,5€ bei **∑8** = **(4|4)**	**|E(x=4,5)| = 1**	$P(x=4{,}5)=\frac{\lvert E(4{,}5)\rvert}{\lvert\Omega\rvert}=\frac{\mathbf{1}}{16}=$ 6,25 %
2,5€ bei **∑7** = **(4|3), (3|4)**	**|E(x=2,5)| = 2**	$P(x=2{,}5)=\frac{\lvert E(2{,}5)\rvert}{\lvert\Omega\rvert}=\frac{\mathbf{2}}{16}=$ 12,5 %
0,5€ bei **∑6** = **(4|2), (2|4), (3|3)**	**|E(x=0,5)| = 3**	$P(x=0{,}5)=\frac{\lvert E(0{,}5)\rvert}{\lvert\Omega\rvert}=\frac{\mathbf{3}}{16}=$ 18,75 %
-0,5€ bei **∑ ≠ 6; 7; 6**	**|E(x=-0,5)| = 3**	$P(x=-0{,}5)=\frac{\lvert E(-0{,}5)\rvert}{\lvert\Omega\rvert}=\frac{\mathbf{10}}{16}=$ 62,50 %

Antwort:

Die Wahrscheinlichkeits**verteilung** bei 1 Spiel:
6,25% das Du 4,5€ gewinnst
12,5% das Du 2,5€ gewinnst
18,5% das Du 0,5€ gewinnst
62,5% das Du -0,5€ gewinnst bzw. 0,5€ verlierst.



Explaining-Lösung

4 Sektoren: 1*Ziffer 1, 1*Ziffer 2, 1*Ziffer 3, 1*Ziffer 4

2 Drehungen = 1 Spiel

Wenn Dir die o.a. Schnell-Lösung nicht klar ist, dann ist fürs Verständnis sicher hilfreich, wenn du eine Tabelle anlegst mit den möglichen Drehzahl-paaren:

Nr	e_i 1. Drehung	e_i 2. Drehung	Paar-summe	$X(e_i) = x_i$ Zugeordneter Gewinn	Wie oft kommt der Gewinn xi vor?
1	1	1	**2**	-0,5	10
2	2	1	**3**	-0,5	10
3	1	2	**3**	-0,5	10
4	3	1	**4**	-0,5	10
5	1	3	**4**	-0,5	10
6	2	2	**4**	-0,5	10
7	4	1	**5**	-0,5	10
8	1	4	**5**	-0,5	10
9	3	2	**5**	-0,5	10
10	2	3	**5**	-0,5	10
11	4	2	**6**	0,5	3
12	2	4	**6**	0,5	3
13	3	3	**6**	0,5	3
14	4	3	**7**	2,5	1
15	3	4	**7**	2,5	1
16	4	4	**8**	4,5	1

Anzahl der Möglichkeiten = 4 Sektoren

Anzahl der Drehungen je Spiel = 2

Damit ergibt sich die Anzahl **aller möglichen** Ereignisse: $|\Omega| = 4^2 = 16$

P(X=xi) = $\frac{\text{\|E\| Anzahl der für } \textbf{xi} \text{ günstigen Ergebnisse}}{\text{\|Ω\| Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$	**X:** Gewinn in €, **xi** = hier ein bestimmter €-Betrag (x1 = 5€, x2 = 3€, x3 = 1€, x4 = 0€) **P (X=xi)** = Wahrscheinlichkeit das der für xi stehende €-Betrag gewonnen wird. **|E(xi)|** Betrag-Anzahl der für xi günstigen Ergebnisse **| Ω |** Anzahl aller möglichen Ergebnisse

| Ω | Anzahl aller Möglichkeiten/Kombinationen bei **Drehen/Ziehen mit Wiederholung =** **n^k** Hier: Jeder der 4 Sektoren, kann bei jeder neuen Drehung **wieder** getroffen werden	**| Ω |** Anzahl aller Möglichkeiten/Kombinationen bei **Drehen/Ziehen ohne Wiederholung =** $\binom{n}{k}$ Hier: Das wäre der Fall, wenn nach jeder Drehung der getroffene Sektor aus dem Spiel genommen wird. Das ist hier nicht der Falle. Siehe dazu Aufgabe „In einer Klasse mit 30 Schülern….“
n^k | hier **n** = **4** Sektoren; **k** = 2 Drehungen **| Ω | = n^k = 4^2 = 16 Möglichkeiten**	Anzahl der Möglichkeiten/Kombinationen bei Drehen/Ziehen **ohne** Wiederholung: $\binom{n}{k} = \frac{n * (n-1) * \ldots * (n-k+1)}{k * (k-1) * \ldots * 1}$ $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! * (n-k)!}$

Wahrscheinlichkeit für den 5€-Auszahlung:

|E5€| Anzahl der für 5€ günstigen Ergebnisse = 1

| Ω | Anzahl aller möglichen Ergebnisse = 16

P(**5€**)= $\frac{1}{16} = 0{,}0625 = 6{,}25\ \%$

In gleicher Weise ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für den 3€ und 1€-Auszahlung:

P(**3€**)= $\frac{|E3€|}{|\Omega|} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} = 0{,}125 = 12{,}5\ \%$

P(**1€**)= $\frac{|E1€|}{|\Omega|} = \frac{3}{16} = 0{,}1875 = 18{,}75\ \%$

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Anzahl |E| der für xi günstigen Ergebnisse	1	2	3	10
xi	5€	3€	1€	0 €
P (X = xi)	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{16}}$ $= 0{,}0625$ $= 6{,}25\ \%$	$\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{16}}$ $= \frac{1}{8}$ $= 0{,}125$ $= 12{,}5\ \%$	$\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{16}}$ $= 0{,}1875$ $= 18{,}75\ \%$	$\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{16}}$ $= \frac{5}{8}$ $= 0{,}625$ $= 62{,}50\ \%$

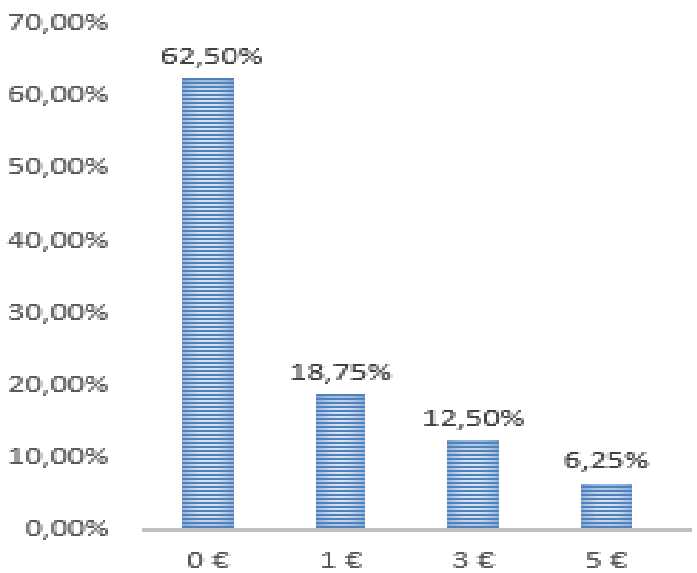
Kontrolle: Die Summe aller P(X = xi) muss 1 bzw. 100% sein. Hier:

$$\textbf{Summe P (X = xi)} = \frac{\mathbf{1}}{16} + \frac{\mathbf{2}}{16} + \frac{\mathbf{3}}{16} + \frac{\mathbf{10}}{16} = \frac{\mathbf{16}}{16} = \mathbf{1}$$

Oder:

Summe P (X=xi) = 6,25+12,50+18,75+62,50 = 100%

Visualisiert als Diagramm dargestellt:



6 QUELLENVERZEICHNIS

Lambacher Schweizer Mathematikbuchserie für Hessen

http://www.mathematik-wissen.de